Предисловие

Решение разнообразных задач является одним из факторов овладения знаниями и умениями, развития умственных способностей и личностных качеств. Поскольку любая деятельность, в том числе и учебная, может быть описана как система решения задач, то от конкретной иерархии задач, используемых в каждый момент обучения, в определяющей степени зависит эффективность достижения целей образования и развития учащихся. Задачи, представленные в учебных пособиях для младших школьников, направлены преимущественно на формирование определенных навыков действий по заданному алгоритму-образцу. Это значительно сужает операционное поле деятельности учащихся, а при встрече с задачами, отличными от шаблонных, вызывает у них затруднения (вплоть до стрессовой ситуации и отказа от решения). Недовольство таким положением дел высказывалось в методической литературе еще в начале XX в., однако проблема остается актуальной и сейчас.

Внимание специалистов, занимающихся проблемами модернизации содержания школьного математического образования, привлекают задачи определенного жанра, в специальной литературе обозначенные различными синонимичными терминами: проблемные, творческие, поисковые, эвристические, т. е. задачи, способ решения которых не находится в распоряжении субъекта, — задачи нестандартные объективно или субъективно.

Нестандартная задача, как особый вид математических упражнений, является темой многих зарубежных и отечественных исследований. История вопроса уходит в глубину веков и восходит к «коллекциям проблем» египтян, греков, индийцев, китайцев, арабов. Этому вопросу посвящались работы многих математиков и педагогов: Л. Пизанского (Фибоначчи), Д. Кардано, П. Ферма, В. Лейбница, Л. Эйлера, К. Гаусса, И. Краснопольского, В. И. Обреимова, Е. И. Игнатьева, Я. И. Перельмана. Современные исследования по обозначенной проблеме принадлежат М. Гарднеру, Г. В. Поляку, Д. Пойа, Ю. М. Колягину, Л. М. Фридману и освещают в основном вопросы классификации нестандартных задач и приемов их решения.

Эффективно организованная учебная деятельность школьников в процессе решения указанных задач является важнейшим средством формирования математической культуры, таких качеств математического мышления, как гибкость, критичность, логичность, рациональность, органическое сочетание которых проявляется в особых способностях человека, дающих ему возможность успешно осуществлять творческую деятельность. Замечено, что нестандартные задачи вносят эмоциональный момент в умственную работу, позволяют рассматривать ситуацию их решения как проблемную, что способствует развитию внутренней мотивации, активизирующей психические процессы (память, внимание, мышление), за счет чего качественнее и быстрее формируются значимые для осуществления учебной деятельности мыслительные операции и познавательные умения.

Для решения нестандартных задач учащимся необходимо приложить определенные усилия, проявить волю, настойчивость и целеустремленность. Необычность приемов решения прививает вкус к самостоятельным исследованиям, проявлению изобретательности, пробуждает положительные эмоции как в процессе решения задач, так и при достижении результата.

Значимость нестандартных задач определяется тем, что они обеспечивают:

1) усвоение программных знаний на более высоком уровне, так как процесс их решения не связан с необходимостью применения заученных правил и приемов, а требует мобилизации всех накопленных знаний, приучает к поиску своеобразных, нешаблонных способов действия;

2) возможность выявления математических и общеинтеллектуальных способностей учащихся, установления уровня обученности и обучаемости, развития математического мышления, формирования познавательных интересов;

3) проверку способности и умения самостоятельно учиться.

Нестандартные задачи традиционно используют в различных формах внеклассной работы, при проведении аттестационных испытаний выпускников, школьных математических олимпиад. В то же время не только учащиеся, но и учителя иногда испытывают трудности при решении задач, отличных от шаблонных. Отчасти это объясняется недостаточным опытом обращения с задачами данной категории в процессе изучения математических дисциплин в учебных заведениях и в педагогической деятельности учителей, а также существованием объективных трудностей, которыми сопровождается их использование (нетехнологичность задачного материала, его количественная и качественная избыточность по отношению к реальным потребностям и возможностям начальной школы, предельная лаконичность рекомендаций по решению, дефицит учебного времени).

Первая часть данной книги посвящена вопросам внедрения нестандартных задач в содержание начального этапа обучения математике. Здесь определены функции нестандартных задач; обозначены критерии оценки их качества; произведен отбор нестандартных задач для начального математического образования; разработана методика работы с нестандартными задачами, описаны способы действий и формы организации деятельности учащихся по достижению результата, обозначено время и место данных задач в учебном процессе.

Во второй части пособия рассмотрена технология обучения решению нестандартных задач, которые для удобства читателя классифицированы. Каждая группа сопровождается методическими замечаниями и вариантами решений, доступных младшим школьникам.

Материалы данного пособия дополняют классическую методику обучения младших школьников решению текстовых задач и могут быть использованы в самообразовании и курсовой подготовке учителей начальных классов, в процессе освоения студентами педвузов и педколледжей содержания учебной дисциплины «Методика преподавания математики», а также родителями младших школьников для проведения дополнительных занятий со своими детьми.

Нестандартная задача как компонент начального математического образования

Значение нестандартных задач в обучении математике

Внимание специалистов к текстовым задачам, в том числе и нестандартным, определяется тем, что в их сюжетах находят отражение практические ситуации, знакомые ученику, поэтому в рассуждениях он может опираться на свой жизненный опыт. Задачи позволяют школьнику убедиться в прикладном характере математических методов, которыми он овладевает на уроках математики, при их решении формируются общеучебные умения и навыки ориентировки в сложной ситуации, что позволяет считать нестандартные задачи мощным инструментом развития человеческого интеллекта. Для решения нестандартных задач учащимся необходимо приложить определенные усилия, проявить волю, настойчивость и целеустремленность. Необычность приемов решения прививает вкус к самостоятельным исследованиям, проявлению изобретательности, пробуждает положительные эмоции как в процессе решения задач, так и при достижении результата.

Идея воспитания познавательного интереса и самостоятельности, нравственных качеств личности и творческих задатков через внедрение нестандартных задач в учебную деятельность младших школьников может быть успешно реализована лишь тогда, когда у них возник интерес к данной задаче, устойчивая потребность решить ее. Традиционно считается, что интересы младших школьников обусловлены занимательностью: их внимание привлекают уроки с игровыми моментами, преобладанием эмоционального материала. Занимательность обычно создается приключениями,

Не для печати

неожиданными событиями, которые часто отвлекают от сути задач. Все неожиданное, броское вызывает детское любопытство, желание посмотреть, скорее даже рассмотреть, но только с внешней стороны, не вникая в существо вопроса. Эти чувства связаны с положительными эмоциями, но внимание быстро угасает, если не возбуждается желание идти дальше, понять природу события.

Нестандартным задачам свойственна занимательность, яркость, необычность изложения и хода решения, что позволяет преобразовать любопытство младшего школьника на более высокую стадию развития, являясь пусковым механизмом детской любознательности. Удивление учащихся может быть направлено на весь спектр приемов, возможных способов решения задач, на их многообразие.

Эффективность обучения математике во многом обусловлена полнотой реализации возможных функций каждой конкретной задачи. Очевидно, что ценность задачи тем выше, чем больше функций может быть реализовано в процессе ее решения. В соответствии с основными целями математического образования (развитие, обучение, воспитание) ведущими функциями задач в обучении принято считать *развивающие*, *обучающие* и *воспитывающие*. Развивающий аспект математических задач, в том числе и нестандартных, связан с приобретением учащимися способностей к осуществлению математической деятельности, формированием мышления, развитием самостоятельности, активности, умения наблюдать, сравнивать, абстрагировать и анализировать.

Воспитательный эффект проявляется в формировании у школьников интереса к предмету и представления о математике как науке и ее отношении к действительности.

Обучающие функции нестандартных задач направлены на формирование системы математических знаний, умений и навыков, в особенной степени навыков моделирования, формализации, рационализации и интерпретации полученных результатов. Трудно переоценить воспитательное значение учебной деятельности школьников, проявляющееся при решении нестандартных задач. Именно здесь они учатся творчески мыслить, активно применять полученные знания, демонстрируя интеллектуальные, эмоциональные и волевые качества.

Использованию в практике преподавания в начальной школе нестандартных математических задач предшествует большая подготовительная работа по их отбору. Поэтому необходимо сформулировать требования, на основе которых осуществляется отбор задач для начального математического образования. Критерии оценки качества задач школьного курса математики сформулированы Ю. М. Колягиным [17]. Конкретизируем их с учетом специфики учебного опыта и возрастных особенностей учащихся начальных классов.

1. Задача, предъявляемая младшему школьнику, должна быть *интересной* и *значимой* для ученика, должна вызвать его желание к исследованию за счет:

— элементов новизны или занимательности в фабуле задачи как благоприятного фактора возбуждения интереса учеников к математике и мотивирования их интеллектуального труда;

— реальности описываемой в задаче ситуации, ее близости жизненному опыту ребенка;

— неожиданного, оригинального решения, требующего применения известных методов в необычных условиях, рационализации и упрощения уже известного приема.

2. Задача должна соответствовать возможностям учащихся начальных классов. Младший школьник должен не только хотеть, но и быть в состоянии решить предложенную задачу. Разочарование учеников слишком трудными математическими вопросами является одной из причин торможения их развития. Нерешенная задача отрицательно влияет на воспитание интереса к математике. Поэтому очень важно, особенно на начальном этапе обучения предмету, чтобы поставленные перед школьниками нестандартные задачи были ими успешно решены. В этой связи внедренные в содержание начального математического образования нестандартные задачи должны: а) соответствовать по объему элементов и сложности их отношений уровню теоретических знаний и практическому опыту учащихся (в целях обеспечения возможности самостоятельного их решения или хотя бы его понимания); б) иметь преимущественно лаконичные формулировки; в) допускать практическое решение (необходимым условием этого является наличие небольших числовых данных), а также разные варианты решения и способы проверки его правильности. В то же время решение задачи не должно

быть слишком легким, основанным на догадках, не требующих ни знаний, ни навыков практических действий.

3. Система нестандартных задач для начальной школы должна включать в себя все основные темы курса, тем самым обеспечивая отработку необходимых, предусмотренных программой знаний и умений, т. е. быть *полной*. Кроме этого, структурные характеристики задачи должны быть разноплановы: с полным (или недостаточным) набором условий, с наличием избыточных данных. Это приучает учеников не доверять внешнему облику задачи и не приступать к ее решению сразу, полагая, что внешний вид совпадает с действительным содержанием.

Традиционно нестандартными для младших школьников являются некоторые виды *арифметических текстовых задач* (задачи на предположение, на движение мимо объектов с учетом их протяженности, на движение в одном направлении; задачи, решаемые способом уравнивания или замены данных, методом инверсии (т. е. с «конца»); задачи с неопределенными неизвестными); *комбинаторных задач* (на упорядочение предметов; на выбор подмножеств и их упорядочение; на определение количества различных вариантов; на выбор наилучшего результата по определенным критериям); *логических задач* (на установление временных, пространственных, функциональных отношений; на активный перебор вариантов; на планирование деятельности; на установление сходства и отношения между элементами множеств; на оперирование категориями *все*, *некоторые*, *отдельные*).

Характер указанных задач, уровень их трудности и сложности определяются реальными возможностями и потребностями учебного процесса, возрастными особенностями обучаемых и их математической подготовкой.

Этапы решения математических задач

Включение нестандартных задач в содержание начального этапа обучения математике в качестве средства реализации ее развивающего потенциала, желание и готовность учителей шире использовать их в своей практике (на уроках и во внеклассной работе) актуализируют методический аспект работы с ними. Обратимся к исследованиям

Не для печати

Ю. М. Колягина [17—19], Л. М. Фридмана [52—55], А. А. Столяра [48].

Деятельность по решению текстовых математических задач, в том числе и нестандартных, включает следующие этапы: 1) *анализ текста задачи* (усвоение содержания); 2) *поиск решения* (разбор задачи и составление плана решения); 3) *осуществление плана решения*; 4) *проверка решения задачи*.

Установлено, что основные затруднения при решении задач данного вида возникают у учащихся прежде всего на начальных этапах хода решения, так как их попытки выбрать теоретический базис и способ действия, полагаясь на имеющийся субъектный опыт, в рассматриваемой ситуации не всегда успешны. Поэтому на этапе *анализа текста задачи* можно рекомендовать:

— интерпретировать условие задачи, т. е. выполнить рисунок, чертеж, таблицу, схему для получения ясного представления о задачной ситуации;

— выделить данные и искомые, отношения между ними, проверить их достаточность и непротиворечивость;

— обратиться к прошлому опыту: вспомнить аналогичные, уже решенные задачи, на которые данная задача может опираться;

— перевести элементы задачи на язык математического метода, предполагаемого для использования при ее решении;

— переформулировать условие задачи, заменив данное в ней описание ситуации другим, сохраняющим все отношения, связи, количественные характеристики объектов задачи (при этом вся лишняя, несущественная информация отбрасывается, текст задачи преобразуется в форму, сокращающую поиск решения).

При *поиске решения задачи* уместно попытаться свести ее к ранее решенным; отбросить несущественную, излишнюю информацию, заменить описание некоторых понятий соответствующими терминами, переорганизовать текст задачи в форму, удобную для поиска решения; расчленить задачу на серию вспомогательных задач, последовательное решение которых составит решение данной задачи.

На этапе *осуществления плана решения задачи* ученику полезно придерживаться советов, касающихся выбора способа оформления решения, гарантирующего фиксацию рассуждений в краткой и ясной, но достаточной для полного воспроизведения решения форме, а также проводить коррекцию правильности решения путем сравнения с условием.

Закончив решение задачи, следует осуществить его *проверку*: прикинуть правильность результата сопоставлением с условием и здравым смыслом; установить соответствие между данными и искомыми; попытаться найти более экономичный способ решения; составить и решить обратную задачу.

Охарактеризуем содержание второго этапа более подробно, поскольку в практике начального обучения он зачастую отсутствует, так как часто дефицит учебного времени побуждает педагогов приступить к оформлению решения задачи сразу после усвоения ее содержания, не уделив хоть сколько-нибудь заметного внимания планированию деятельности по ее решению, т. е. поиску решения.

При поиске решения нестандартных задач (как и математических задач вообще) целесообразно применять методы рассуждения от «начала» (данных) задачи и от «конца» (вопроса) задачи — синтез и анализ.

Суть *синтетического способа* рассуждения состоит в вычленении простых задач (из предложенной составной) и их решении, т. е. в сведении задачи к подзадачам. Овладеть данным методом рассуждения помогает прием деления конкретной задачи на смысловые части с последующим сравнением результатов проделанной операции. В этом случае простые задачи вычленяются произвольно, тогда как при разборе задачи синтетическим методом это происходит с ориентацией на вопрос исходной задачи.

Аналитический способ разбора характеризуется тем, что рассуждение начинается с вопроса задачи. Выясняется характер предварительных данных, необходимых для ответа на поставленный в условии вопрос. Здесь, как и в синтетическом способе, выделяются простые задачи, но рассуждение ведется в направлении, противоположном плану решения. Поэтому характер упражнений, обучающих умению осуществлять разбор задачи аналитическим методом, несколько иной: они направлены на подбор условий, соответствующих заданному вопросу.

В целях обучения школьников разбору задач аналитическим и синтетическим способами в методике широко используется прием, называемый «деревом рассуждений»: по ходу разбора задачи составляется схема, помогающая учащимся увидеть и зафиксировать выделенные элементарные задачи и обозначить план решения, т. е. облегчить организацию поиска решения. Покажем «дерево рассуждений» обобщенной графической схемой.

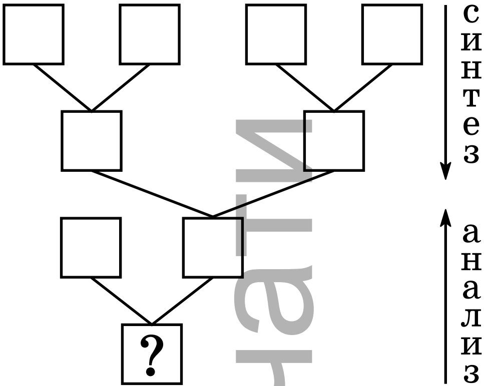

Рис. 1

Заметим, что в практике обучения начальной математике к составлению плана решения подходят, как правило, с помощью аналитических рассуждений. Синтетический способ используют реже. Подобная тенденция не вполне оправдана, поскольку существуют задачи, применение аналитического метода разбора к условию которых не облегчает, а, напротив, затрудняет процесс поиска решения. Таковыми, например, являются задачи, в формулировке которых содержится несколько вопросов (тогда не совсем ясно, с какого из них начать вести рассуждения), или случаи, когда вопрос задачи спрятан в условии или выражен повествовательным предложением, что само по себе уже является трудностью. Кроме того, аналитический способ разбора предполагает составление плана решения синтетическим способом, что требует определенных временных затрат. При наличии же в условии задачи большого количества данных применение метода рассуждения от «начала» задачи (синтез) влечет за собой вероятность появления «лишних» новых величин, и, как следствие этого, увеличивается время поиска решения. Сказанное свидетельствует о необходимости ориентироваться на внешние признаки задачи при выборе способа ее разбора.

Если учащиеся владеют упомянутыми методами рассуждения, то в задаче, содержащей 2—3 действия, они легко приходят к решению. В действительности же не все младшие

Не для печати

школьники умеют самостоятельно проводить нужные для такого разбора действия, тем более в ходе решения нестандартной задачи. Учитывая это, обратим внимание на целесообразность использования метода, основанного на анализе известных компонентов задачи, выявлении возможных связей между ними и выборе из них тех, которые необходимы для решения. Он называется *методом исчерпывающих проб* и основан на выявлении всех логических возможностей, а затем отборе тех из них, которые удовлетворяют условию задачи.

Вопросы для поиска решения задачи методом исчерпывающих проб могут предлагаться учащимся в виде памятки.

1. Подумай, что обозначает каждое число в задаче.
2. Найди пары чисел, связанные между собой.
3. Составь из них выражения и объясни их смысл.
4. Из полученных выражений составь другие выражения и поясни их значение.
5. Из всех составленных выражений отбери нужные для решения задачи.

Рассмотрим решение методом исчерпывающих проб на примере задачи: «Доярки молочной фермы взяли обязательство за пастбищный сезон, продолжающийся 5 месяцев, получить от каждой коровы 3000 л молока. Выполнят ли они свое обязательство, если будут надаивать от каждой коровы по 20 л молока в день? (Считать, что в месяце 30 дней.)»

Конструкция текста данной задачи (условие — вопрос — условие) довольно сложная для восприятия, специального разъяснения требует вопрос (ведь здесь требуется не только найти количественную характеристику искомого компонента задачи, но и установить соответствие между данными и искомыми), а городскому школьнику не очень ясен и сюжет.

Следуя памятке, переберем все возможные связи.

1) $3000 : 5$ — молока нужно получить от каждой коровы за месяц;

2) $20 \cdot 30$ — всего молока получат за один месяц;

3) $30 \cdot 5$ — дней длится пастбищный сезон;

4) $3000 : 20$ — дней потребуется фактически.

Из этих выражений следует несколько способов решения предложенной задачи.

Способ 1

Ученики выясняют, за сколько дней можно получить нужное количество молока, записывают равенство $(3000 : 5) : 20 = 30$ (дн.), сравнивают с количеством дней в месяце, данным в задаче (30 дн. = 30 дн.), а затем положительно отвечают на ее вопрос.

Способ 2

Школьники ищут ответ на вопрос: «Сколько молока от каждой коровы нужно надаивать за день, чтобы выполнить обязательство?», записывают равенство (3000 : 5) : 30 = 20 (л), а дальше действуют по аналогии со способом 1: 20 л = 20 л, значит, доярки выполнят свое обещание.

Способ 3

Отвечая на вопрос: «Сколько месяцев должен продолжаться пастбищный сезон, чтобы доярки выполнили свое обязательство?», учащиеся могут записать одно из двух равенств: 3000 : (20 · 30) = 5 (мес.) или (3000 : 20) : 30 = 5 (мес.). Сравнив полученное число с данным, они записывают равенство 5 мес. = 5 мес. и утвердительно отвечают на вопрос задачи.

Способ 4

Ученики отвечают на вопрос: «Сколько молока можно получить от каждой коровы, если в течение 5 месяцев, каждый из которых длится 30 дней, ежедневно от нее будут надаивать 20 л молока?» Для этого они могут записать одно из двух равенств: 20 · (30 · 5) = 3000 (л) или (20 · 30) · 5 = 3000 л. Сравнив полученное количество молока с данным в задаче, они дадут положительный ответ.

Способ 5

1) 3000 : 5 = 600 (л) — должны получить в месяц от каждой коровы;
2) 20 · 30 = 600 (л) — получали фактически.
600 л = 600 л.

Способ 6

1) 3000 : 20 = 150 (дн.) — потребуется;
2) 30 · 5 = 150 (дн.) — длится пастбищный сезон.
150 дн. = 150 дн.

Такое тщательное изучение связей между количественными характеристиками величин полезно, так как позволяет полнее выявить скрытые в тексте задачи математические зависимости, проанализировать их и перевести на математический язык. Вместе с тем в результате установления соответствий между одними и теми же данными можно получить

Не для печати

разные способы решения задач. Приведенный пример подтверждает сказанное.

Для овладения описанным приемом учащиеся должны научиться выполнять упражнения на составление указанных выражений из данных задачи. Например, учитель предлагает школьникам текст и дает задание: «Поставить вопрос так, чтобы задача решалась сложением или вычитанием». Также полезно предлагать ученикам задания на пояснение смысла уже составленных по задаче выражений. Например, дано условие: «От проволоки длиной 15 м отрезали сначала 5 м, затем еще 7 м» и задание: «Объясни, что узнаешь, выполнив действия: 15 – 5, 15 – 7, 5 + 7, 7 – 5, 15 – (7 + 5)».

Составление таких упражнений не представляет большого труда для учителя, а опыт работы с ними поможет учащимся овладеть еще одним методом поиска решения задачи.

Остановимся более подробно на приеме, позволяющем составить план решения задачи без ее разбора. В его основе лежит *математическое и предметное моделирование*. Моделирование — понятие, заимствованное из теории познания, означает процесс или деятельность субъекта по построению модели.

По характеру средств построения выделяют модели: а) материальные (вещественные, реальные); б) статические (неподвижные) и динамические (действующие); в) идеальные (образные, знаковые, мысленные). Наглядность модели имеет обобщенный характер: все несущественные свойства объекта отбрасываются, поэтому не мешают восприятию нужных свойств. Модели позволяют создавать у учащихся наглядные образы абстрактных отношений, которые обычными средствами предметной наглядности создать невозможно.

Следует иметь в виду, что создание наглядных образов с помощью модели требует от учащихся определенных знаний теоретического характера и активного участия в разработке и построении моделей, а не только в их изучении. Для моделирования привлекаются различные математические объекты: числовые и буквенные формулы, таблицы, уравнения, неравенства и их системы, ряды, графы и схемы, диаграммы Венна и т. п.

Рассмотрим решение задачи: «Если каждому ученику в классе раздать по 2 конфеты, то 17 конфет останется. Если же раздать по 3 конфеты, то двум ученикам конфет не достанется. Сколько имеется конфет и сколько учеников в классе?» — с помощью модели.

Не для печати

Ученики 7 класса решают ее, составляя систему двух линейных уравнений. Однако предметная модель помогает и младшим школьникам ответить на ее вопрос.

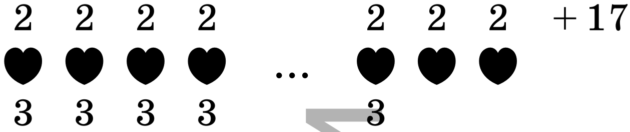

Рис. 2

На модели видно: чтобы первые ученики, имеющие по 2 конфеты, получили по 3 конфеты, надо раздать 17 оставшихся конфет и еще 2 конфеты (двум ученикам конфет не хватило), т. е. раздать дополнительно $17 + 2 = 19$ конфет. Следовательно, в классе 19 учеников, а конфет $19 \cdot 2 + 17 = 55$.

Особую роль в курсе математики начальной школы играет *графическое моделирование*: графическая интерпретация условия задачи, рисунок, чертеж, диаграмма, граф. Информация, представленная в графической форме, легче для восприятия, она емкая и достаточно условная, опредмечивает абстрактные понятия, несет информацию лишь о существенных признаках объекта, а также формирует графические навыки учащихся. Графическую модель можно составить для любой простой и составной задачи. Ее выполнение заставляет ученика внимательно читать текст задачи, позволяет перенести часть умственных действий в действия практические, закрепить результат в виде материального объекта, дает возможность найти решение самостоятельно.

Например, графическую модель задачи: «25 учеников класса изучают английский язык, немецкий — 27 учеников, причем 18 школьников изучают одновременно оба языка. Сколько всего человек в классе изучают эти иностранные языки?» — лучше выполнить с помощью диаграммы Венна или отрезков.

Такая интерпретация условия задачи позволяет увидеть, что численное значение искомого не является суммой данных в тексте количеств учеников, изучающих какой-либо иностранный язык, поскольку число 18 содержится в этой

Рис. 3

сумме дважды. Поэтому для нахождения ответа на поставленный вопрос необходимо его удалить из полученного результата, т. е. решение задачи оформится выражением (25 + 27) – 18.

В процессе решения очень трудных задач нестандартного характера следует уделять особое внимание актуализации знаний учащихся. В этой связи полезно использовать специально подобранные серии задач, составленные с учетом прошлого опыта решающих. Для облегчения решения задачи надо построить систему задач так, чтобы при решении сложных можно было использовать ранее решенные задачи. Данный дидактический прием назван системой подсказок. Он делает поиск решения целенаправленным, создает оптимальные условия для активизации мыслительной деятельности учащихся, способствует развитию умения нешаблонно, с интересом подойти к решению задачи, систематизирует знания и субъектный опыт.

Покажем, как можно использовать систему подсказок при решении нестандартной задачи на движение объектов с учетом их протяженности: «Человек, стоявший на мосту длиной 150 м, заметил, что поезд прошел мимо него за 10 с, а на движение по мосту он затратил 25 с. Найти длину и скорость поезда».

Усвоение ее содержания связано с необходимостью учета длины поезда. Для понимания этого следует провести подготовительную работу по сравнению объектов, размеры которых важны, и объектов, величиной которых можно пренебречь. В этой связи на этапе актуализации знаний можно рекомендовать обратиться к воспроизведению взаимосвязи между величинами *скорость*, *время*, *расстояние* и решить (с обязательной демонстрацией на моделях) следующие задачи.

З а д а ч а 1. Сколько времени затратит поезд длиной 900 м на проезд мимо телеграфного столба, если скорость его движения равна 300 м/мин?

Построенная модель позволяет переформулировать условие задачи: «За какое время пройдет поезд расстояние 900 м, если его скорость равна 300 м/мин?» Решение задачи очевидно: 900 : 300 = 3 (мин).

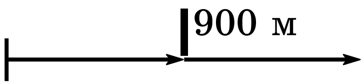

Рис. 4

З а д а ч а 2. Скорость птицы равна 30 км/ч. Сколько времени ей потребуется, чтобы пролететь тоннель длиной 500 м? Решение: 30 км/ч = 500 м/мин, 500 : 500 = 1 (мин).

З а д а ч а 3. Длина поезда равна 400 м. Какое расстояние пройдет тепловоз с момента въезда в тоннель длиной 1000 м до того, как последний вагон выйдет из тоннеля?

Рис. 5

Важно, чтобы в процессе решения задачи 3 ученики поняли, что поезд начинает входить в тоннель, когда туда въезжает локомотив, и считается вышедшим из тоннеля, когда выезжает последний вагон поезда, т. е. за это время поезд проедет расстояние, равное суммарному значению длин тоннеля и поезда.

З а д а ч а 4. За какое время поезд длиной 400 м пройдет тоннель длиной 600 м, если скорость поезда равна 60 км/ч?

Рис. 6

Решение: 60 км/ч = 1 км/мин; 600 + 400 = 1000 м; 1000 м = 1 км; 1 : 1 = 1 мин.

После решения предложенной серии задач можно обратиться к усвоению содержания основной задачи. В этой связи уточняются характеристики величин, данных в ее условии: 10 с — время, необходимое для прохождения расстояния, равного длине поезда; 25 с — время, необходимое для прохождения расстояния, равного сумме длин моста и поезда.

Выполним модель задачи.

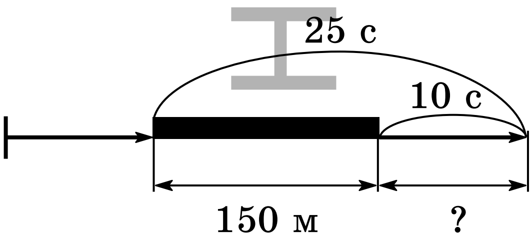

Рис. 7

Не для печати

Решение:

1) 25 – 10 = 15 (с) — время, за которое поезд пройдет расстояние, равное длине моста;

2) 150 : 15 = 10 (м/с) — скорость поезда;

3) 10 · 10 = 100 (м) — длина поезда.

Методы решения нестандартных математических задач

Разрабатывая инструментарий решения нестандартных математических задач, необходимо учитывать специфику учебного опыта младших школьников, отдавая предпочтение субъективно доступным средствам решения, поскольку объективное наличие более простого с точки зрения науки варианта решения не гарантирует целесообразности его применения на конкретной ступени обучения предмету.

Решение текстовых задач осуществляется разными методами. В основе каждого метода лежат различные виды математических моделей. Например, алгебраическое решение задачи приводит к уравнениям или их системам, геометрическое — к диаграмме или графику, арифметическое — к математическому выражению или цепочке математических выражений. Практически каждая задача в рамках выбранного метода допускает решение с помощью различных моделей. Так, одну и ту же задачу можно решить различными арифметическими способами. С целью избежания разночтения и неоднозначности трактовки термина *метод решения* задача считается решенной различными *способами*, если решения отличаются связями между данными и искомым, положенными в основу решения, или последовательностью использования этих связей в рамках одного и того же метода.

В качестве основных в математике различают *арифметический* и *алгебраический* (*аналитический*) методы решения текстовых задач.

При *арифметическом методе* ответ на вопрос задачи находится в результате выполнения последовательности действий и операций с имеющимися в тексте задачи (явно или косвенно) числами, величинами. Различные арифметические способы решения одной и той же задачи отличаются отношениями между данными, данными и искомым, данными и неизвестными, положенными в основу выбора арифметических действий, или последовательностью выполнения действий.

В качестве примера рассмотрим различные арифметические способы решения нестандартной (для младших школьников) задачи: «Для полива 8 яблонь и 4 слив мальчики принесли 140 ведер воды. Сколько ведер воды вылили под яблони и сколько под сливы, если на полив одной яблони уходит воды в 3 раза больше, чем на полив одной сливы?»

Способ 1

Если за исходное рассмотреть отношение между количеством деревьев (*8 яблонь*, *4 сливы*), то ответ на вопрос задачи может быть получен путем выполнения следующих действий.

1) 8 : 4 = 2 (раз) — яблонь больше, чем слив;
2) 2 · 3 = 6 (раз) — воды вылили больше под яблони;
3) 1 + 6 = 7 (част.) — в общем объеме воды;
4) 140 : 7 = 20 (вед.) — израсходовали на полив всех слив;
5) 140 – 20 = 120 (вед.) — израсходовали на полив всех яблонь.

Способ 2

Если рассуждать, начиная с отношения, зафиксированного в тексте задачи последним (*на полив яблони уходит воды в 3 раза больше*), то цепочка будет другой.

1) 8 · 3 = 24 (сл.) — можно полить вместо 8 яблонь;
2) 24 + 4 = 28 (сл.) — можно полить вместо 8 яблонь и 4 слив;
3) 140 : 28 = 5 (вед.) — нужно для полива одной сливы;
4) 5 · 4 = 20 (вед.) — вылили под сливы;
5) 140 – 20 = 120 (вед.) — вылили под яблони.

Или:

4) 5 · 3 = 15 (вед.) — нужно для полива одной яблони;
5) 15 · 8 = 120 (вед.) — вылили под яблони;
6) 140 – 120 = 20 (вед.) — вылили под сливы.

Заметим, что решение задачи арифметическим методом можно оформить по-разному: в вопросно-ответной форме, по действиям, по действиям с пояснениями, в виде таблицы.

При *алгебраическом методе* ответ на вопрос задачи находится в результате составления и решения уравнения: после анализа содержания задачи выбирается неизвестное, оно обозначается буквой, вводится в текст задачи, а затем (на основе выделенных в условии задачи зависимостей) составляются два выражения, связанные отношением равенства, что позволяет записать соответствующее уравнение. Найденные в результате решения уравнения корни осмысливаются с точки зрения содержания задачи, а корни, не соответствующие условию задачи, отбрасываются. Если буквой обозначено неизвестное, не являющееся искомым, то искомое находится на основе взаимосвязи его с тем неизвестным, которое было обозначено буквой.

Вернемся к задаче, в которой требуется определить количество ведер воды, израсходованное на полив слив и яблонь. Это можно узнать, если будет известно численное значение ведер воды, которое уходит на полив одной яблони и одной сливы. Обозначим через x количество ведер воды, вылитых под одну сливу, тогда на полив одной яблони нужно $3x$ ведер воды. Так как полили 4 сливы, 8 яблонь и израсходовали 140 ведер воды, составим уравнение: $4x + 8 \cdot 3x = 140$. Решив его, получаем $x = 5$. Значит, для полива всех слив потребовалось $5 \cdot 4 = 20$ ведер воды, а яблонь — $140 - 20 = 120$.

Проверку можно выполнить, соотнеся найденный результат с условием задачи или решив задачу другим способом или методом.

Технология составления уравнений (или их систем) по условию задачи достаточно широко освещена в методической литературе, хотя общего алгоритма нет. Даже такая кажущаяся вполне естественной рекомендация, как принять искомую величину за неизвестное, не является универсально применимой, так как во многих задачах это приводит к явно нерациональным способам решения (так, если в задаче принять за x количество ведер воды, израсходованных на полив всех слив, то получится более сложное уравнение, решение которого доступно лишь ученику старшего школьного возраста).

Рассмотренный пример показывает, что одну и ту же математическую задачу можно решить различными способами и методами. Ясно, что преимущество — за субъективно доступными средствами решения, поскольку объективное наличие более простого с точки зрения науки варианта решения не гарантирует целесообразности его применения на конкретной ступени обучения предмету. Известно, что в начальном курсе математики преобладает арифметический способ решения задач, алгебраический применяется значительно реже в силу недостаточного опыта обращения младших школьников с уравнениями.

Не для печати

Помимо указанных, в школьной практике используются и другие методы, позволяющие включить в содержание начального курса математики задачи, традиционно решаемые на следующих ступенях обучения. Это *графический и практический метод*, *метод подбора*, *метод последовательного или упорядоченного перебора*, а также *метод предположения ответа*. Решение ими может быть оформлено в виде последовательности действий, в вопросно-ответной форме, в виде таблицы, чертежа, схематичного рисунка, графа.

Рассмотрим на конкретных примерах возможности использования данных методов.

З а д а ч а 5. Из двух пунктов навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Первый проехал $\frac{1}{3}$ пути, второй — $\frac{5}{8}$ пути. Произошла ли встреча велосипедистов?

Данная задача легко решается средствами арифметики: сложив две дроби и оценив полученное значение путем сравнения с единицей, ответим на вопрос задачи. Однако алгоритм сложения дробей с разными знаменателями изучается в курсе математики 6 класса и младшему школьнику неизвестен. Тем не менее решение этой задачи вполне возможно осуществить и после изучения темы «Доли. Дроби» в начальном курсе математики.

Изобразим расстояние между пунктами отрезком, численное значение длины которого делится одновременно на 3 и на 8 — для конкретной задачи удобнее построить отрезок длиной 24 единичных отрезка.

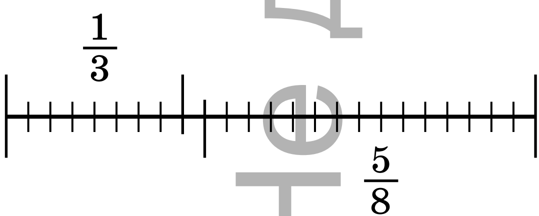

Рис. 8

Опираясь на чертеж, можно сформулировать ответ: «Встреча не произошла». Такой метод решения называется *графическим*.

Решим задачу: «В гараже 20 легковых и грузовых автомобилей, причем на каждую легковую машину приходится

Не для печати

4 грузовые. Сколько легковых и сколько грузовых машин в гараже?», выполняя действия с предметами, т. е. *практическим методом*.

Изобразим каждую машину символом. Известно, что на каждую легковую машину приходится 4 грузовые. Поэтому каждому символу, обозначающему легковую машину, поставим в соответствие четыре таких же символа — грузовые машины.

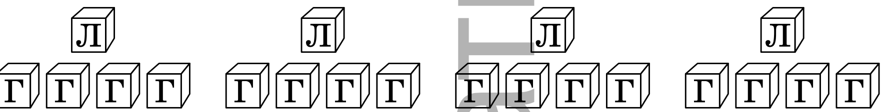

Рис. 9

Практическое решение задачи может оформляться в виде символического рисунка, схемы или таблицы. Покажем это на примере задачи: «На стоянке у Мишиного дома было 8 транспортных средств: двухколесных мотоциклов и легковых автомобилей. Миша насчитал у них 22 колеса. Сколько мотоциклов и сколько автомобилей было на стоянке?»

Пересчетом установим, что если у каждого транспортного средства было бы только 2 колеса, то всего у них было бы 16 колес ($2 \cdot 8 = 16$). Сделаем символический рисунок или выложим соответствующее количество, например, кругов.

Рис. 10

Но по условию задачи известно, что всего было не 16, а 22 колеса. Следовательно, надо добавить еще 6 колес ($22 - 16 = 6$). К трем первым транспортным средствам добавим по 2 колеса, так как у каждого автомобиля есть 4 колеса.

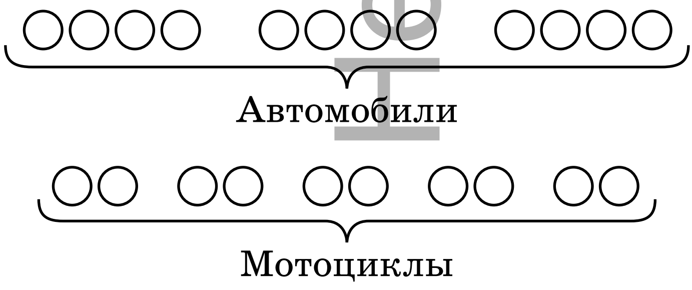

Рис. 11

Не для печати

Практическое решение некоторых нестандартных задач можно зафиксировать в виде схемы или схематичного рисунка. Рассмотрим это на примере двух задач.

З а д а ч а 1. Как переправиться трем разбойникам и трем горожанам через реку в двухместной лодке без переправщика, если на одном берегу нельзя оставлять разбойников больше, чем горожан?

Обозначим разбойника буквой Р, а горожанина — Г. На схематическом рисунке стрелка показывает направление движения; буквами на ней показано, кто переправляется; слева записываются те, кто находится на левом берегу; справа — кто в данный момент уже переправился.

1)	Г Г Г Р	Р Р	→	
2)	Г Г Г Р	Р	←	Р
3)	Г Г Г	Р Р	→	Р
4)	Г Г Г	Р	←	Р Р
5)	Г Р	Г Г	→	Р Р
6)	Г Р	Г Р	←	Г Р
7)	Р Р	Г Г	→	Г Р
8)	Р Р	Р	←	Г Г Г
9)	Р	Р Р	→	Г Г Г
10)	Р	Р	←	Г Г Г Р
11)		Р Р	→	Г Г Г Р

Рис. 12

Оформление задач с использованием такой формы записи позволяет избежать возможных ошибок, поскольку всегда можно в ходе рассуждений обратиться к пересчету числа персонажей и проверке выполнения условий переправы.

З а д а ч а 2. Собрался Иван-царевич на бой с трехглавым и четыреххвостым Змеем Горынычем. «Вот тебе меч-кладенец, — говорит ему Баба Яга. — Одним ударом он может срубить либо одну голову, либо две головы, либо один хвост, либо два хвоста, но запомни: срубишь хвост — два вырастут, срубишь два хвоста — голова вырастет, срубишь голову — голова вырастет, срубишь две головы — ничего не вырастет». За сколько ударов Иван-царевич может срубить Змею Горынычу все головы и все хвосты?

Так как по условию задачи только рубка двух голов Змея одновременно приводит к их полной ликвидации, то для полной победы над Змеем необходимо добиться, чтобы у него оставалось только четное число голов. Поскольку Змей имеет 3 головы, то следует рубить ему хвосты так, чтобы это привело к получению еще трех голов. В связи с этим действия Ивана-царевича можно изобразить схематично.

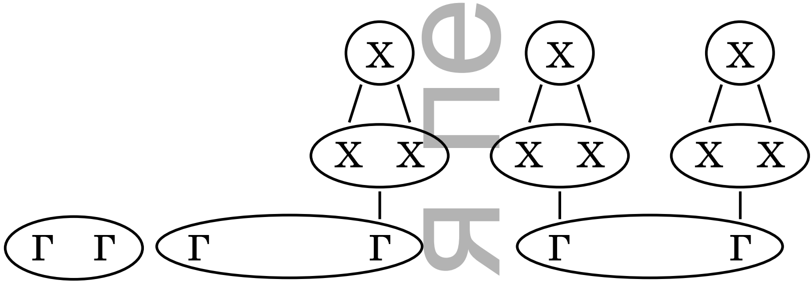

Рис. 13

На схеме буквой Х обозначен хвост, Г — голова, овалом обозначена одна рубка. Согласно условию задачи рубка одного хвоста (они обведены овалами в первой строке) приводит к тому, что на месте каждого хвоста вырастает 2 новых (вторая строка). Если срубить 3 раза по 2 хвоста, то на месте каждой пары срубленных хвостов вырастает по 1 голове. Итак, у Змея Горыныча было 3 головы, да еще 3 выросли за счет рубки хвостов. Все 6 голов можно разрубить парами, что и сделано на третьей строке.

Таким образом, Змей Горыныч побежден девятью ударами.

Табличный способ записи практического решения задачи проиллюстрируем в ходе решения задачи: «Имеются два сосуда вместимостью 3 л и 5 л. Как с помощью этих сосудов налить из водопроводного крана ровно 4 л воды?»

Путем анализа условия задачи выясняем, что даны две мерки — 3 л и 5 л и неограниченное количество воды в водопроводном кране. Требуется, используя эти мерки, налить 4 л воды. Разные способы решения задачи представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

Ход	1	2	3	4	5	6
5 л	5	2	2	—	5	4
3 л	—	3	—	2	2	3

Таблица 2

Ход	1	2	3	4	5	6	7	8
5 л	—	3	3	5	—	1	1	4
3 л	3	—	3	1	1	—	3	—

Нетрудно убедиться, что найденным решениям соответствуют следующие выражения $5 - 3 + 5 - 3$ и $3 + 3 - 5 + 3$, значение которых равно 4.

Табличным способом оформляется практическое решение и целого класса логических задач — на установление отношений, например: «Беседуют трое друзей: Белов, Рыжов и Чернов. Брюнет сказал Белову: «Любопытно, что один из нас блондин, другой брюнет, третий — рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос у каждого из друзей?»

Для решения задачи воспользуемся таблицей, отмечая по горизонтали фамилии, а по вертикали — цвет волос. По условию задачи Белов — не блондин, Чернов — не брюнет, а Рыжов — не рыжий. Это позволяет поставить минусы.

Цвет волос / Фамилия	Рыжий	Черный	Русый
Белов			—
Чернов		—	
Рыжов	—		

Не для печати

Предложение «Брюнет сказал Белову» означает, что Белов — не брюнет, поэтому поставим еще один минус.

Цвет волос / Фамилия	Рыжий	Черный	Русый
Белов		—	—
Чернов		—	
Рыжов	—		

Очевидно, что Белов — рыжий, следовательно, Чернов и Рыжов соответственно блондин и брюнет.

Цвет волос / Фамилия	Рыжий	Черный	Русый
Белов	+	—	—
Чернов	—	—	+
Рыжов	—	+	—

Графический и практический методы решения нестандартных математических задач в большей или меньшей степени имеют место в учебной деятельности младших школьников. Однако при их решении учащиеся чаще обращаются к методам упорядоченного перебора (полной индукции) и подбора. Рассмотрим его использование на примере задачи: «Можно ли найти два натуральных числа, из которых одно больше другого на 4, а их произведение равно 48?»

При решении этой задачи на начальной ступени рекомендуют воспользоваться методом полной индукции — рассмотреть все возможные варианты пар чисел, значение произведения которых равно 48, а затем выбрать подходящий (если таковой имеется).

Заметим, что математически решение данной задачи сводится к составлению и решению уравнения $x \cdot (x + 4) = 48$.

Иногда перебор вариантов удобнее фиксировать в таблице. Приведем пример таблицы к задаче: «На вопрос: «Сколько тебе лет?» мальчик отвечал, что через 13 лет ему будет в 4 раза больше, чем ему было 2 года назад. Сколько лет мальчику?»

Не для печати

Обозначим: А — возраст мальчика в данное время; Б — его возраст 2 года назад; В — возраст через 13 лет. При заполнении таблицы возраст 1 и 2 года не берем по смыслу задачи.

А	Б	В	В : Б	Ответ
3	1	$3 + 13 = 16$	$16 : 1 > 4$	—
4	2	$4 + 13 = 17$	$17 : 2 > 4$	—
5	3	$5 + 13 = 18$	$18 : 3 > 4$	—
6	4	$6 + 13 = 19$	$19 : 4 > 4$	—
7	5	$7 + 13 = 20$	$20 : 5 = 4$	+

При решении математических задач этим методом особое внимание нужно обратить на способ подбора чисел, отдавая предпочтение более рациональным. Рассмотрим задачу: «В коллекции 8 насекомых. Среди них есть шестиногие жуки и восьминогие пауки. Если пересчитать все ноги в коллекции, то их окажется 54. Сколько в коллекции жуков и сколько пауков?» Поскольку общее число объектов задачи равно 8, то наиболее удачным следует считать подбор, начиная со среднего варианта — 4 жука и 4 паука. А затем, оттолкнувшись от полученного результата, выходят на решение. Менее удачным представляется последовательный (упорядоченный) перебор всех вариантов, особенно в случае с большими числовыми значениями известных величин.

Особо остановимся на методе решения текстовых арифметических задач, который называется *предположение ответа* или *метод одного ложного предположения*. Суть его состоит в следующем. Выдвигается гипотеза: пусть ответ задачи будет таким-то. Путем рассуждений и вычислений проверяется принятая гипотеза, т. е. устанавливается, выполняются ли при ней условия задачи. В случае, когда число не удовлетворяет условиям задачи, находят отклонение гипотезы от точного ответа: если отклонение отрицательно, т. е. гипотеза меньше ответа, то отклонение прибавляется к гипотезе; если гипотеза больше ответа, т. е. отклонение положительно, то оно вычитается из гипотезы; если отклонения нет, то гипотеза принимается за ответ задачи.

Рассмотрим задачу: «Отец обещал сыну за каждую правильно решенную задачу опускать в копилку 10 монет, а за

Не для печати

каждую неправильно решенную задачу сын должен возвращать отцу по 5 монет. После того как было решено 20 задач, у сына в копилке оказалось 80 монет. Сколько задач сын решил неправильно и сколько без ошибок?»

Предположим, что 10 задач решено верно. Узнаем, сколько денег в копилке окажется при этом: $10 \cdot 10 - 5 \cdot 10 = 50$ (мон.). Получили, что $50 < 80$ (отклонение отрицательно). При принятой гипотезе количество денег уменьшилось бы на $80 - 50 = 30$ (мон.). За каждую правильно решенную задачу вернем по $10 + 5 = 15$ (мон.). Теперь узнаем, на сколько принятая гипотеза меньше истинного ответа: $30 : 15 = 2$ (з.), поэтому количество задач, решенных без ошибок, составит $10 + 2 = 12$ (з.), а неправильно решенных $10 - 2 = 8$ (з.) или $20 - 12 = 8$ (з.). Способом установления соответствия между данными и искомыми легко определяется правильность решения предложенной задачи: $10 \cdot 12 - 5 \cdot 8 = 80$ (мон.).

Иногда в ходе решения задачи применяются несколько методов: алгебраический и арифметический, практический и арифметический, графический и арифметический. В этом случае считают, что задача решена комбинированным или смешанным методом.

Несмотря на ограниченность применения описанных методов решения задач, ознакомление с ними учащихся позволяет ввести в практику обучения начальной математике задачи, решение которых традиционно осуществлялось только в режиме внеклассных мероприятий — кружков и олимпиад. Конечно, может встретиться задача, для решения которой ни один из известных приемов не будет пригодным: искусство решения задач и состоит в конструировании новых методов и приемов.

Не для печати

Методика обучения младших школьников решению нестандартных математических задач

Рассмотрим вопросы организации рационально-логической стороны учебной деятельности младших школьников по решению различных нестандартных арифметических текстовых задач. Для удобства читателей задачи распределены на группы, но данная классификация не исчерпывает всего многообразия нестандартных (для младших школьников) текстовых арифметических задач. Однако, на наш взгляд, она довольно полная. Задачи подобраны с учетом задачного материала следующей ступени обучения (5—6 классы), где школьники осваивают алгебраический метод их решения. Полагаем, опыт общения учащихся начальных классов с задачами данной категории имеет пропедевтическое значение.

Среди задач, представленных в данной главе, есть как достаточно известные (классические), адаптированные для младших школьников, так и оригинальные, составленные автором пособия (они отмечены знаком *). Наиболее сложные задачи сопровождаются вариантами решений, субъективно доступных младшим школьникам. К остальным задачам предложены ответы.

Представленные здесь задачи можно использовать при проведении: а) диагностических мероприятий (как инструмент для установления уровня обучаемости школьников, развития их математического мышления, способностей, интеллекта, умения самостоятельно учиться); б) внеклассной работы; в) аттестационных испытаний выпускников начальной школы (итоговых, вступительных).

Однако окончательное суждение о пользе, месте и времени применения каждой из предложенных задач в обучении младших школьников математике может сделать лишь учитель.

Не для печати

Задачи на предположение

Анализ условия задач данного вида приводит к необходимости сопоставления двух (трех и т. д.) групп объектов, сходных по сути, но имеющих отличительные признаки (например, разное количество ног, колес, страниц и т. п.).

Подготовительная работа

Цели подготовительной работы:

— уточнение представлений учащихся об отдельных объектах действительности;

— осознание характера зависимости одной величины от другой, так как от количества объектов каждого вида зависит суммарное значение их отличительных характеристик.

Примеры подготовительных упражнений

1. Ответь на вопросы: «Сколько лап у четырех собак? Сколько ножек у двух сороконожек? На сколько лап у пяти собак больше, чем ног у пяти кур? Где больше пассажиров и на сколько: в трех четырехместных лодках или в пяти двухместных?»

2. Реши задачу: «На лодочной станции 9 двухместных и трехместных лодок. Сколько могло быть лодок каждого вида? Сколько туристов можно разместить в этих лодках в каждом случае?»

Для ответа на вопросы ученики заполняют таблицу.

Двухместные лодки	Трехместные лодки	Всего туристов
1	8	26
2	7	25
3	6	24
4	5	23
5	4	22
6	3	21
7	2	20
8	1	19

Не для печати

Вывод: общее число пассажиров зависит от количества лодок каждого типа.

3. Реши задачу: «На лодочной станции есть только двухместные и трехместные лодки. Сколько потребуется тех и других лодок, чтобы рассадить 18 туристов?»

Решение данной задачи также лучше оформить в виде таблицы.

Двухместные лодки	Трехместные лодки
9	0
0	6
3	4
6	2

Приведем примеры других задач, используемых на подготовительном этапе. Они отличаются от задач на предположение тем, что в их условии не указано общее количество рассматриваемых объектов.

1. На детской площадке только двухколесные и трехколесные велосипеды, у которых всего 18 колес. Сколько могло быть велосипедов каждого вида?

2. Членам кружка «Умелые руки» надо разрезать кусок проволоки длиной 102 см на части длиной 15 см и 12 см так, чтобы не было обрезков. Сколькими способами это можно сделать?

3. Магазину нужно получить со склада 185 кг конфет. На складе имеются коробки с конфетами по 16, 17, 20 кг. Каких коробок и сколько мог получить магазин?

4. Пять участников соревнований стали призерами, набрав по 20, 19, 18 очков и заняв соответственно I, II, III места. Сколько участников завоевали каждое призовое место, если, вместе взятые, они набрали 94 очка?

5. Петя купил тетради по 7 и по 4 р. за штуку, заплатив 53 р. Сколько куплено тех и других тетрадей?

6. Несколько учащихся собирали макулатуру. Каждая девочка собрала по 15 кг, а каждый мальчик — по 21 кг. Всего они собрали 174 кг макулатуры. Сколько мальчиков и сколько девочек собирали макулатуру?

Не для печати

Методы решения задач на предположение

З а д а ч а. Нужно рассадить 22 туристов в двухместные и четырехместные лодки. Сколько тех и других лодок потребуется, если всего лодок 8?

Практический метод

Решение данной задачи может быть представлено последовательностью символических рисунков.

** ** ** ** ** ** ** **

Рис. 14

Введя соответствующие обозначения и выполнив практические действия, пересчетом устанавливаем, что если в каждую лодку посадить по 2 туриста, то в 8 лодках разместятся только 16 из 22 человек. Следовательно, 6 туристов разместили по двое (так как лодки были и четырехместные) в первые три лодки. Таким образом находится ответ на вопрос задачи.

**** **** ****
четырехместные

** ** ** ** **
двухместные

Рис. 15

Подчеркнем, что практическое решение задачи можно оформить при помощи символического рисунка, схемы, таблицы; задача допускает решение практическим методом при наличии небольших числовых данных в ее условии; по ходу осуществления практических действий целесообразно фиксировать соответствующие им арифметические операции.

Арифметический метод

1) $2 \cdot 8 = 16$ (тур.) — разместили по двое в 8 лодках;
2) $22 - 16 = 6$ (тур.) — осталось разместить;
3) $4 - 2 = 2$ (мест) — больше в четырехместной лодке;
4) $6 : 2 = 3$ (лод.) — четырехместные;
5) $8 - 3 = 5$ (лод.) — двухместных.

Проверка: $2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 22$; $22 = 22$.

Не для печати

Возможен другой способ решения в рамках арифметического метода, если начать решение с предположения о том, что во всех лодках разместили по 4 туриста.

1) $4 \cdot 8 = 32$ (тур.) — разместилось бы, если все лодки были бы четырехместные;

2) $32 - 22 = 10$ (тур.) — сверх данного в задаче количества;

3) $4 - 2 = 2$ (мест) — больше в четырехместной лодке, чем в двухместной;

4) $10 : 2 = 5$ (лод.) — двухместных;

5) $8 - 5 = 3$ (лод.) — четырехместные.

Алгебраический метод

Обозначим через x число двухместных лодок, тогда четырехместных лодок $8 - x$. Уравнение, составленное по условию задачи, примет вид: $2 \cdot x + 4 \cdot (8 - x) = 22$. Решение данного уравнения доступно лишь ученику более старшего школьного возраста.

Метод перебора

Оформим последовательный перебор всех вариантов в таблицу.

Двухместные лодки	Четырехместные лодки	Всего туристов
1	7	$30 > 22$
2	6	$28 > 22$
3	5	$26 > 22$
4	4	$24 > 22$
5	3	$22 = 22$

Метод рационального подбора

Поскольку общее число лодок равно 8, то наиболее удачным следует считать подбор, начиная со среднего варианта — 4 четырехместные лодки и 4 двухместные лодки. А затем, оттолкнувшись от полученного результата (24 туриста), выйти на решение, уменьшив на 1 число четырехместных лодок.

Не для печати

Полезно также еще до решения сделать прикидку:

— если бы все лодки были двухместные, то $2 \cdot 8 = 16$ туристов могли бы разместиться в них;

— если бы все лодки были четырехместные, то $4 \cdot 8 = 32$ туриста могли бы разместиться в них.

Данное в условии задачи общее количество туристов (22) ближе к 16, чем к 32, следовательно, двухместных лодок было больше, чем четырехместных, например 5 и 3.

Метод предположения ответа

Предположим, что из 8 лодок только 3 лодки были двухместные, а остальные 5 — четырехместные. Узнаем, сколько туристов можно рассадить в лодки при этом условии: $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 26$ туристов. Получили, что $26 > 22$ (полученное число больше данного общего количества туристов). При принятой гипотезе количество туристов увеличилось бы на 4, так как $26 - 22 = 4$. Уберем из каждой четырехместной лодки по 2 туриста, так как в каждой четырехместной лодке на 2 места больше, чем в двухместной ($4 - 2 = 2$). Теперь узнаем, на сколько принятая гипотеза больше истинного ответа: $4 : 2 = 2$ лодки, поэтому количество четырехместных лодок равно $5 - 2 = 3$, а двухместных $8 - 3 = 5$ или $3 + 2 = 5$ лодок. Способом установления соответствия между данными и искомыми легко определяется правильность решения предложенной задачи: $2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 22$, $22 = 22$.

Примеры задач на предположение

1*. Для своего участия в школьном спектакле «Ромео и Джульетта» Вася купил 10 пуговиц двух видов — по 3 и по 4 р., на общую сумму 34 р. Сколько пуговиц каждого вида купил Вася?

2*. Имеющийся в магазине центнер картофеля разложили в 26 пакетов по 5 и по 3 кг. Сколько тех и других пакетов потребовалось?

3. Для детского сада купили 10 игрушек на 39 р. 60 к. За каждый мяч заплатили по 3 р. 30 к., а за куклу — по 5 р. 50 к. Сколько купили кукол и сколько мячей?

4. Для уроков труда всем 17 мальчикам 3 класса купили наборы инструментов. Нужного количества одинаковых наборов в магазине не оказалось, и пришлось купить наборы разных видов — по 63 и по 87 р., на общую сумму 1311 р. Сколько наборов инструментов каждого вида куплено?

5*. Для украшения новогодней елки купили 8 наборов шаров двух видов — по 6 и по 10 штук в каждом. Общее количество шаров — 68. Сколько наборов каждого вида купили?

6*. Кот Леопольд поймал 10 пескарей и окуней. Общий вес улова составил 2 кг 240 г. Пескарь весит 30 г, а окунь — 1 кг. Каких рыб больше и на сколько поймал кот Леопольд?

7*. В зоопитомнике 8 медведей и лисиц. Их общий вес 1100 кг. Известно, что масса одного медведя 350 кг, а масса лисицы 10 кг. Сколько в зоопитомнике медведей и лисиц в отдельности?

8*. Мальвина купила для Буратино 13 учебников и тетрадей, заплатив за всю покупку 50 сольдо. Известно, что учебник стоит 10 сольдо, а тетрадь — 2 сольдо. Сколько тетрадей и сколько учебников купила Мальвина?

9*. Десяти участникам школьного спектакля «Ромео и Джульетта» раздали 40 реплик. Каждая девочка читает по 3 реплики, а каждый мальчик — по 8 реплик. Сколько мальчиков и сколько девочек занято в спектакле?

10*. Для группы поддержки школьного матча по баскетболу купили 10 единиц инвентаря на 39 долларов 60 центов. За транспаранты заплатили по 3 доллара 30 центов, а за дудки — по 5 долларов 50 центов. Сколько куплено транспарантов?

11*. У Пеппи Длинныйчулок на вилле «Большая курица» жили куры и лошади. Всего голов было 12, а ног — 30. Сколько кур и лошадей в отдельности жило у Пеппи на вилле?

12*. Для маскировки Винни-Пуха тучкой Пятачок купил 16 воздушных шариков на 45 монет: по 10, по 5 и по 1 монете. Шаров разной цены было куплено не менее одной штуки. Сколько шаров разного вида купил Пятачок?

13*. Дед Мазай решил перевезти на другой берег 28 зайцев на 6 лодках. В одни лодки входит по 4 зайца, в другие — по 6 зайцев. Сколько различных лодок потребуется, если все лодки заняты и свободных мест нет?

14*. Винни-Пух разлил 60 л меда в 9 горшочков двух видов — вместимостью 4 и 8 л. Сколько горшков каждого вида занял Винни-Пух?

15*. Пятачок купил 5 воздушных шаров двух размеров — большие и маленькие, причем первые вдвое дороже вторых. Сколько куплено тех и других воздушных шаров в отдельности, если за всю покупку Пятачок заплатил 63 р., а цена больших шаров 18 р.?

16*. Для того чтобы переправить до Хогвартса 58 учеников-волшебников, требуется 12 лодок. Сколько четырех- и шестиместных лодок потребуется, если все лодки заняты и свободных мест нет?

17*. На уроке по уходу за волшебными существами ученики из Хогвартса гуляли с соплохвостами. Всего было 40 голов и 160 ног. Сколько было учеников и соплохвостов, если у соплохвостов по 6 ног?

18*. В зоопарке десяти волкам и медведям скормили 82 кг мяса. Каждый волк съедает по 5 кг мяса, а медведь — по 9 кг мяса. Сколько волков и сколько медведей в зоопарке?

19*. Кунгурскую ледяную пещеру открыли в XIX в. В первый день было продано 30 билетов по 40 и 60 к., на общую сумму 14 р. Сколько билетов каждого вида было продано?

20*. Красная Шапочка испекла для бабушки 15 пирожков с мясом и капустой. Сколько было тех и других пирожков в отдельности, если известно, что масса одного пирожка с мясом 150 г, пирожка с капустой — 100 г, а их общая масса составляет 1 кг 750 г?

21*. У зоолога Кузи в коллекции есть попугаи и хомяки. Причем он знает, что у его питомцев вместе 6 голов и 20 ног. Сколько попугаев и хомяков у Кузи?

22*. Пятачок пришел на день рождения к Винни-Пуху и привез ему в подарок бочку с медом массой 30 кг. Винни-Пух разлил весь мед в банки по 2 и 3 кг. Всего получилось 11 банок. Сколько банок каждого вида у него получилось?

23*. В отряде «Звездный» 18 детей. Они живут в шести уютных комнатах — двухместных и четырехместных. Сколько двухместных и сколько четырехместных комнат заняли дети, если свободных мест в комнатах нет?

24*. Строительная бригада построила 18 двух- и трехэтажных домов. На их строительство понадобилось 140 плит. Известно, что на один двухэтажный дом ушло 6 плит, а на один трехэтажный — на 4 плиты больше. Сколько двухэтажных домов построила бригада?

Задачи на замену данных

В условии этих задач есть данные, связанные кратным или разностным отношением, что позволяет при решении осуществить замену одних данных на другие, не изменяя общей известной величины (например, стоимости или массы покупки).

Подготовительная работа

Цель подготовительной работы — осознание учащимися (в неявном виде, т. е. без введения термина) свойств прямой и обратной пропорциональной зависимости: с увеличением (или уменьшением) одной величины увеличивается (или уменьшается) другая (при постоянной третьей). Например, чем дороже цена, тем меньше предметов можно купить на имеющиеся деньги. Важно обратить внимание на сохранение кратности отношений: во сколько раз больше цена, во столько раз меньше количество (при постоянной стоимости). Если величины связаны не кратным, а разностным отношением, то требуется понимание того, что замена нескольких больших величин таким же количеством меньших влечет за собой уменьшение общего количества.

Примеры подготовительных упражнений

Реши задачи.

1. Для детского сада купили 4 мяча и 3 куклы. Кукла в 2 раза дороже мяча. Сколько кукол можно было купить вместо 4 мячей? Сколько всего кукол можно было купить на все деньги? Сколько мячей стоят столько же, сколько 3 куклы?

2. Тетрадь и ручка в 2 раза дороже, чем 2 тетради. Во сколько раз тетрадь дешевле ручки?

3. Миша купил 5 ручек и 3 карандаша. Известно, что ручка дороже карандаша на 6 р. На сколько рублей дешевле обошлась бы Мише покупка 5 карандашей, чем 5 ручек? На сколько рублей дороже обошлась бы Мише покупка: а) 3 ручек, чем 3 карандашей; б) 5 ручек, чем 5 карандашей?

4. За 5 скакалок и 2 мяча заплатили 90 р. Скакалка в 2 раза дешевле мяча. Во сколько раз мяч дороже скакалки? Сколько скакалок можно купить вместо трех мячей? Сколько мячей можно купить вместо 10 скакалок?

Методы решения задач на замену данных

З а д а ч а 1. Мама купила 4 яблока и 3 груши, заплатив за всю покупку 50 р. Груша в 2 раза дороже яблока. Сколько стоит яблоко? Сколько стоит груша?

Алгебраический метод

Алгебраический метод может использоваться в неявном виде, т. е. без введения термина для названия способа решения и латинских букв для обозначения переменных.

4я + 3г = 50, но г = 2я
4я + 3 · 2я = 50
4я + 6я = 50
10я = 50
я = 5; г = 2 · 5 = 10

Арифметический метод

Способ 1

1) 3 · 2 = 6 (яб.) — вместо 3 груш;
2) 4 + 6 = 10 (яб.) — всего;
3) 50 : 10 = 5 (р.) — цена яблока;
4) 5 · 2 = 10 (р.) — цена груши.

Способ 2

1) 4 : 2 = 2 (гр.) — вместо 4 яблок;
2) 2 + 3 = 5 (гр.) — всего;
3) 50 : 5 = 10 (р.) — цена груши;
4) 10 : 2 = 5 (р.) — цена яблока.

Проверка: 5 · 4 + 10 · 3 = 50.

Рассуждения таким методом можно сочетать с практическими (схематичными) действиями.

Способ 1

Способ 2

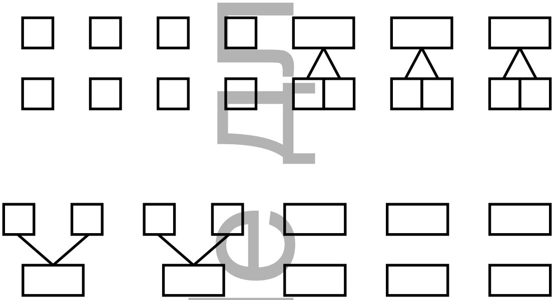

Рис. 16

Практический метод

З а д а ч а 2. 12 корзин с яблоками и 14 корзин с грушами весят 6 ц 92 кг. Причем масса одной корзины с грушами на 10 кг меньше массы одной корзины с яблоками. Сколько весят по отдельности одна корзина груш и одна корзина яблок?

Не для печати

Алгебраический метод

12я + 14г = 692, но я = г + 10
12 · (г + 10) + 14г = 692
26г = 692 – 120
26г = 572
г = 22; я = 22 + 10 = 32

Арифметический метод

Способ 1

1) 10 · 14 = 140 (кг) — на столько меньше весят 14 корзин с грушами, чем 14 корзин с яблоками;

2) 692 + 140 = 832 (кг) — было бы, если бы все ящики были с яблоками;

3) 12 + 14 = 26 (ящ.) — всего;

4) 832 : 26 = 32 (кг) — вес одной корзины с яблоками;

5) 32 – 10 = 22 (кг) — вес одной корзины с грушами.

Способ 2

1) 10 · 12 = 120 (кг) — на столько больше весят 12 корзин с яблоками;

2) 692 – 120 = 572 (кг) — яблок и груш, если бы их было одинаково;

3) 572 : 26 = 22 (кг) — вес одной корзины с грушами;

4) 22 + 10 = 32 (кг) — вес одной корзины с яблоками.

Проверка: 32 · 12 + 22 · 14 = 692, 692 = 692.

Примеры задач на замену данных

1. Яблоко и груша вместе весят 300 г. Если на чашу весов, где лежит яблоко, добавить гирю в 100 г, а к груше — гирю в 50 г, то установится равновесие. Какова масса: а) яблока; б) груши?

2*. Масса 10 волков и 3 рысей равна 496 кг. Рысь на 8 кг легче волка. Какова масса: а) волка; б) рыси? (Все волки имеют одинаковую массу. Все рыси имеют одинаковую массу.)

3*. Белоснежка и семь гномов вместе весят один центнер, причем Белоснежка в 3 раза тяжелее гнома. Сколько весит Белоснежка? Сколько весит гном? (Все гномы имеют одинаковую массу.)

4*. Во дворце морского царя было 250 жемчужин и 140 раковин на общую сумму 1920 монет. Сколько золотых

Не для печати

монет можно выручить с продажи жемчужин, если известно, что каждая жемчужина в 2 раза дороже раковины?

5*. Восемь белок и шесть зайцев весят вместе 33 кг. Белка в 5 раз легче зайца. Какова масса белки? (Все белки имеют одинаковую массу. Все зайцы имеют одинаковую массу.)

6*. Три лисицы и два волка весят вместе 110 кг. Волк тяжелее лисицы в 4 раза. Сколько лисиц уравновесят одного медведя массой 350 кг? (Все лисицы имеют одинаковую массу. Все волки имеют одинаковую массу.)

7*. Ранним утром Незнайка вышел из Цветочного города и направился в Солнечный город. Расстояние между городами равно 60 км. Сначала Незнайка шел пешком 3 ч, а потом 1 ч 30 мин ехал на газированном автомобиле Винтика и Шпунтика. Какую часть пути он шел пешком, если скорость газированного автомобиля в 6 раз больше собственной скорости Незнайки-пешехода? Сколько времени затратил бы Незнайка, если бы весь путь он: а) шел пешком; б) ехал на автомобиле?

8*. Малыши Солнечного города собирали урожай со своего фруктового сада, в котором росли 12 яблонь и 6 грушевых деревьев. Малыши завезли в свой погреб 450 кг фруктов. Сколько килограммов яблок и сколько килограммов груш они собрали, если с каждой яблони собрали урожай в 2 раза больше, чем с каждой груши?

9*. На ферме кота Матроскина каждый день надаивают 200 л молока. Молоко разливают в 8 бидонов и 8 банок. Каждый бидон вмещает молока на 15 л больше, чем банка. В деревенский магазин отвозят $\frac{1}{4}$ часть всего молока. Сколькими способами это можно сделать?

10*. Купили 10 яблок, 8 груш и 3 лимона, заплатив за всю покупку 148 р. Известно, что яблоко в 2 раза дешевле груши и на 1 р. дешевле лимона. Сколько стоит яблоко, груша и лимон в отдельности?

11*. Летом Малыш отдыхал на даче, которая находится в 48 км от города. Карлсон решил навестить друга. Первую половину пути он летел, а затем шел пешком, затратив на весь путь 8 ч. Скорость полета в 3 раза больше, чем пешего хода. Сколько часов сэкономил бы Карлсон, если бы он летел весь путь?

12*. От Федоры убежали 15 чайных и 30 столовых ложек. Их общая масса составила 600 граммов. Чайная ложка вдвое легче столовой. Какова масса чайной ложки? Во сколько раз 10 чайных ложек легче, чем 5 столовых?

Не для печати

13*. Муха-Цокотуха решила сварить варенье и купила на базаре 6 кг малины и 3 кг черники, заплатив за всю покупку 180 денежек. Известно, что черника в 2 раза дороже малины. Сколько денежек Муха-Цокотуха заплатила бы за 1 кг малины и 1 кг черники?

14*. Волк, догоняя Зайца, проделал путь в 320 км, причем 12 ч он ехал за ним на велосипеде и 7 ч на автомобиле. Сколько километров пути он ехал на велосипеде и сколько на автомобиле, если известно, что скорость автомобиля в 4 раза больше скорости велосипеда?

15*. Мальчик Пат и собачонка
Весят два пустых бочонка.
Собачонка без мальчишки
Весит две больших коврижки,
А с коврижкой поросенок
Весит, знаете, бочонок.
Сколько весит мальчик Пат?
Сосчитай-ка поросят.

16*. Аладдину необходимо пересечь великую пустыню в 720 миль. 10 дней он путешествовал на ковре-самолете и 6 дней на спине джинна. Сколько миль он пролетел на спине джинна и сколько летел на ковре-самолете, если ковер-самолет движется в 3 раза быстрее?

17*. Робин Бобин за день съедает, кроме всего прочего, 20 огромных шоколадных конфет, 10 тортов и 5 пирогов общей массой 210 кг. Известно, что торт в 2 раза легче, чем пирог, и в 2 раза тяжелее, чем конфета. Какова масса торта, конфеты и пирога в отдельности?

18*. Папа полил 10 яблонь и 5 кустов смородины. Для этого он принес 210 ведер воды. Сколько ведер воды он вылил под яблони и сколько под кусты смородины, если на полив одной яблони ушло воды в 3 раза больше, чем на полив одного куста смородины?

Задачи на отыскание чисел по их сумме, разности или кратному отношению

Подготовительная работа

Цель подготовительной работы — формирование умений переводить на язык математики и изображать схематически различные утверждения.

Примеры подготовительных упражнений

1. Найди 2 числа, если их:

а) сумма равна 20, а разность 10;

б) сумма равна 100, а частное 9;

в) разность равна 20, а сумма 100;

г) разность равна 30, а частное 2.

2. Одно число больше другого в 3 раза, а их сумма равна 60. Найди эти числа.

Методы решения задач на отыскание чисел по их сумме, разности или кратному отношению

З а д а ч а 1. На школьном участке посадили 20 лип и кленов, причем на каждую липу приходится 4 клена. Сколько лип посадили?

Практический метод

Изобразим каждое дерево символом. Известно, что на каждую липу приходятся 4 клена. Поэтому каждому символу, обозначающему липу, поставим в соответствие четыре символа клена.

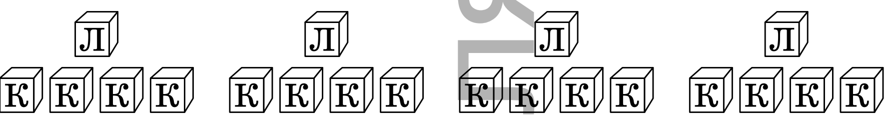

Рис. 17

Арифметический метод

1) 1 + 4 = 5 (частей) — в общем количестве;

2) 20 : 5 = 4 (дер.) — в одной части;

3) 1 · 4 = 4 (липы);

4) 20 – 4 = 16 или 4 · 4 = 16 (кленов)

Рис. 18

Не для печати

Задача 2. Бабушке столько лет, сколько внуку месяцев. Вместе им 65 лет. Сколько лет бабушке? Сколько лет внуку?

Уточнение условия задачи (1 год = 12 месяцев, следовательно, бабушка в 12 раз старше внука) приводит к его переформулировке: «Внуку и бабушке вместе 65 лет, причем бабушка в 12 раз старше внука».

Арифметический метод

Эта задача легко решается средствами алгебры, однако в начальной школе предпочтительнее арифметическое решение.

1) $1 + 12 = 13$ — частей в суммарном значении возраста;
2) $65 : 13 = 5$ — лет внуку;
3) $65 - 5 = 60$ или $5 \cdot 12 = 60$ — лет бабушке.

Задача 3. Возвращаясь с рыбалки, мальчики подсчитывали свой улов. Оказалось, что у Саши вдвое больше окуней, чем у Пети, а у Коли на 11 окуней меньше, чем у Пети. Общее число окуней выражается двузначным числом, меньшим 50, количество единиц в котором на единицу больше количества десятков, а «сумма» цифр равна 9. Каков улов каждого мальчика?

Очевидно, что общее число окуней равно 45. Изобразим условие схемой.

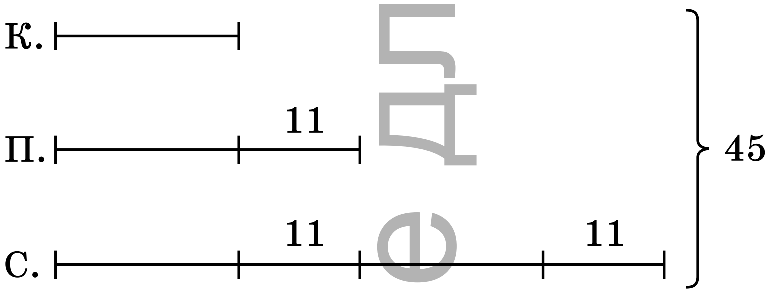

Рис. 19

1) $11 \cdot 3 = 33$ (ок.);
2) $45 - 33 = 12$ (ок.);
3) $12 : 4 = 3$ (ок.) — у Коли;
4) $3 + 11 = 14$ (ок.) — у Пети;
5) $14 \cdot 2 = 28$ (ок.) — у Саши.

Проверка: $3 + 14 + 28 = 45$, $45 = 45$.

Не для печати

Примеры задач на отыскание чисел по их сумме, разности или кратному отношению

1*. Расстояние от Солнечного до Цветочного города равно 60 км. Часть этого пути идет в гору, часть — горизонтально и часть — под гору. Путь под гору в 3 раза меньше горизонтального участка пути и на 10 км меньше, чем в гору. Найди длину каждого участка пути.

2*. За день летучие обезьяны злой волшебницы Бастинды съедают 165 бананов, ананасов и кокосов, причем бананов — в 2 раза больше, чем ананасов, и в 3 раза больше, чем кокосов. Сколько фруктов каждого вида съедают за день летучие обезьяны?

3*. Доктор Айболит вылечил за 3 дня 49 больных зверей. В первый день он вылечил на 3 зверей больше, чем во второй день, и в 2 раза меньше, чем в третий. Сколько зверей вылечил Айболит в третий день?

4*. Периметр треугольника равен 16 см. Длина первой стороны на 2 см меньше второй и на 1 см больше третьей стороны. Найди длины сторон треугольника.

5*. Однажды птички-невелички решили устроить концерт. На него прилетели 33 птицы: 6 синичек, ворона, ласточек на 3 больше, чем соловьев, и на 5 меньше, чем галок. Сколько ласточек участвовало в концерте?

6*. Трем братьям вместе 18 лет. Ивану в 3 раза больше лет, чем Матвею, а Тимофей на 3 года старше Матвея. Сколько лет может быть их сестре Марусе, если известно, что она младше Ивана, но старше Тимофея?

7*. Кощей Бессмертный старше Бабы Яги на 300 лет, а вместе им 1000 лет и 2 года. Сколько лет Бабе Яге?

8*. Винни-Пух, Пятачок и ослик Иа вместе съели 21 банку варенья. Винни-Пух съел на 8 банок варенья больше, чем ослик Иа, который съел на 2 банки больше, чем Пятачок. Сколько банок варенья съел каждый?

9. У Кати вдвое больше цветных карандашей, чем у Раи, а у Светы на 13 карандашей меньше, чем у Раи. Сколько цветных карандашей у каждой девочки, если общее их количество выражается двузначным числом, меньшим 50, «сумма» цифр которого равна 11?

10*. В саду у Беляночки и Розочки на двух розовых кустах росли 24 розы — белые и красные. Белых роз было в 3 раза больше, чем красных. Сколько роз цвело на каждом кусте?

Не для печати

11. В стаде были коровы и овцы, всего 560 голов. Через месяц число коров увеличилось на 16. Тогда коров стало в 15 раз меньше, чем овец. Сколько коров было в стаде вначале?

12. На запасных путях станции стояли два состава с одинаковыми вагонами. В одном составе на 12 вагонов больше, чем в другом. Когда от каждого состава отцепили по 6 вагонов, то длина одного состава оказалась в 4 раза больше длины другого. Сколько вагонов было в каждом составе?

13. Длину отрезка сначала измерили в сантиметрах, а затем в миллиметрах. Во втором случае получили число на 135 больше, чем в первом. Какова длина отрезка в сантиметрах?

14*. В двух карманах у Карлсона находится 37 шоколадных конфет, причем в одном из них количество конфет больше, чем в другом, на наибольшее однозначное число. Сколько шоколадных конфет в каждом кармане у Карлсона?

15*. В саду у Золушки цветет 16 кустов белых и желтых роз, причем на каждый куст желтых роз приходится 3 куста белых роз. Сколько кустов белых роз цветет в саду у Золушки?

16*. В поисках Кая Герда прошла за 3 дня 36 км. В первый день она прошла вдвое меньше, чем во второй день, и втрое меньше, чем в третий. Сколько километров Герда проходила каждый день? В какой из дней Герда шла пешком? Ехала в упряжке с северным оленем?

17*. Курочка Ряба снесла для бабушки и дедушки за три дня 52 яйца. Известно, что во второй день их было больше в 3 раза, чем в первый, и на 3 меньше, чем в третий день. Сколько яиц несла курочка Ряба каждый день? Как изменится решение задачи, если известно, что в третий день мышка бежала, хвостиком махнула и разбила одно яйцо?

18*. Однажды Слоненок, Попугай и Удав решили измерить длину Удава. Слоненок измерения делал в сантиметрах, а Попугай — в миллиметрах. У Попугая получилось число, на 1782 большее, чем у Слоненка. Нет ли здесь ошибки? Если нет, то каковы измерения у Слоненка? Какова на самом деле средняя длина Удава?

19*. Винни-Пух тяжелее Пятачка в 3 раза и на 60 кг. Какое число покажет стрелка весов, если друзья встанут на них вместе?

20*. Во время поездки в город крестьянин приобрел некоторое количество куриц и свиней, всего 479 голов. Через полгода число свиней увеличилось на 17. Тогда свиней стало в 15 раз меньше, чем куриц. Сколько свиней было куплено сначала?

21*. Бабушка Варвара попросила гномов Руди и Аристарха наполнить бочку, стоящую в саду, водой. Гномы наполнили бочку, причем Аристарх принес воды в 3 раза больше, чем Руди. Вместе они принесли 64 ведра. Сколько ведер воды принес каждый гном? На сколько ведер воды Руди принес меньше, чем Аристарх?

22*. В зоопарке строго контролируются условия, в которых живут его обитатели. Они постоянно получают пищу. На слона и альпийскую корову в день расходуют 160 кг травы. Слон съедает в день 5 одинаковых порций, а корова — 3 такие же порции. Сколько килограммов травы съедает в день слон?

Задачи, решаемые с «конца»

Выделение данных задач в отдельную группу связано со способом рассуждения при их решении, которое выполняется с «конца» задачи. В методико-математической литературе он назван *методом инверсии* или *обращения*. Суть его состоит в следующем: если надо найти число, которое после ряда операций приводит к известному числу, то для этого необходимо с известным числом произвести в обратном порядке все обратные операции. Этим правилом часто пользовались при решении задач индийские, затем арабские и западноевропейские математики. Они формулировали его так: «Умножение становится делением, деление умножением, то что было выигрышем (сложение), становится потерей (вычитание) и наоборот».

Подготовительная работа

Цели подготовительной работы:

— уточнить смысл слов *половина*, *четверть*, *третья часть* и т. п.;

— осознать суть понятия *обратная операция*;

— актуализировать способ нахождения числа по известной части.

Не для печати

Примеры подготовительных упражнений

1. Задумано число, $\frac{2}{3}$ которого равны 8. Какое число задумано?

2. Петя прочитал 20 страниц, что составляет $\frac{1}{5}$ общего числа страниц в книге. Сколько всего страниц в книге?

3. Задумано число. Если его увеличить на 5, а затем уменьшить на 10, то получится 20. Какое число задумано?

4. Если возраст мамы уменьшить в 5 раз, затем увеличить на 8, то получится возраст сына, которому через 3 года будет 18 лет. Сколько лет маме?

5. У Кати было несколько конфет. Половину конфет она съела сама, а остальными конфетами угостила друзей: 2 конфеты она отдала Пете, а 3 — Оле. Сколько конфет было у Кати?

6. На одной чашке весов лежит арбуз, а на другой — гиря в 3 кг. Весы находятся в равновесии. Какова масса арбуза?

7. На одной чашке весов лежат 2 одинаковых арбуза, а на другой — такой же арбуз и гиря в 5 кг. Весы находятся в равновесии. Какова масса арбуза?

8. На одной чашке весов лежит арбуз, а на другой — половина такого же арбуза и две гири, по 1 кг 500 г каждая. Какова масса арбуза?

9. У Марины целое яблоко, две половинки и 4 четвертинки. Сколько яблок у Марины?

10. 60 овец пьют воду, а другая половина отары пасется. Сколько овец в отаре?

11. За книгу заплатили 10 р. и еще $\frac{1}{3}$ часть цены книги. Какова цена книги?

Методы решения задач, решаемых с «конца»

З а д а ч а. Женщина продавала яблоки. Первая покупательница купила у нее половину всех яблок и еще пол-яблока, вторая — половину оставшихся и еще пол-яблока, а третья купила последние 5 яблок. Сколько яблок принесла женщина на продажу?

По ходу усвоения содержания задачи необходимо составить схему в отрезках, которая окажет существенную помощь в ее решении. На начальном этапе обучения решению задач такого вида целесообразно предлагать учащимся схему 1 или схему 2 в готовом виде.

Схема 1

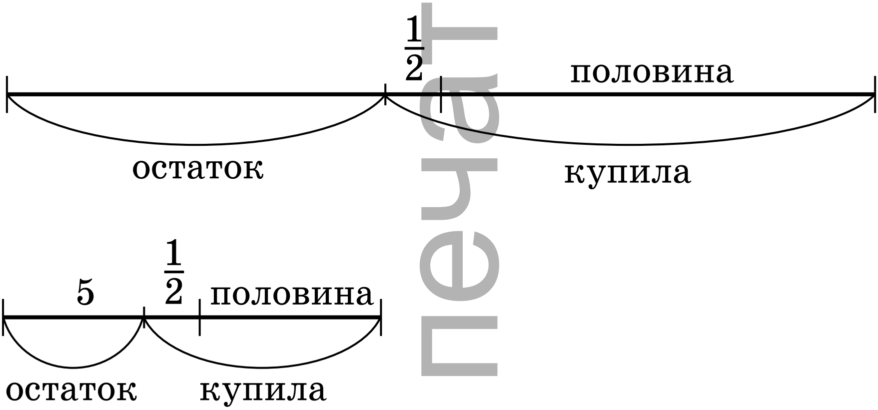

Рис. 20

Схема 2

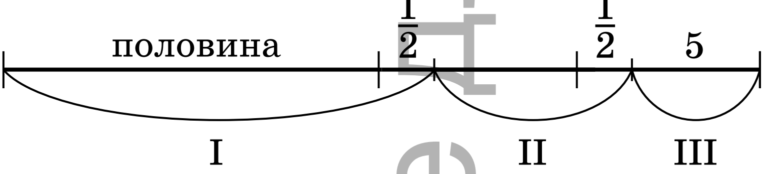

Рис. 21

После подробного анализа схем легко записать решение задачи по действиям.

Решение (рассуждение с «конца» задачи):

1) $5 + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$ — яблок в половине остатка;

2) $5\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2} = 11$ — яблок в остатке;

Не для печати

3) $11 + \frac{1}{2} = 11\frac{1}{2}$ — яблок в половине всего количества;

4) $11\frac{1}{2} + 11\frac{1}{2} = 23$ — всего яблок.

В учебниках Л. Г. Петерсон предложены следующие варианты оформления арифметического решения подобных задач.

x	23
$:2$	$11\frac{1}{2} \cdot 2$
$-\frac{1}{2}$	$11 + \frac{1}{2}$
$:2$	$5\frac{1}{2} \cdot 2$
$-\frac{1}{2}$	$5 + \frac{1}{2}$
-5	$0 + 5$
0	0

$$\boxed{x} \xrightarrow{:2} \boxed{} \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \boxed{} \xrightarrow{:2} \boxed{} \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \boxed{5}$$

$$\boxed{23} \xleftarrow[\cdot 2]{} \boxed{11\frac{1}{2}} \xleftarrow[+\frac{1}{2}]{} \boxed{11} \xleftarrow[\cdot 2]{} \boxed{5\frac{1}{2}} \xleftarrow[+\frac{1}{2}]{} \boxed{5}$$

Рис. 22

Метод подбора

Если в задаче небольшие числовые данные, то при ее решении можно воспользоваться методом подбора.

Рациональный подбор предполагает прежде всего предварительную прикидку возможного количества яблок. Из условия задачи следует, что их численное значение немногим больше 20, так как 5 яблок меньше, чем четверть их общего количества. Допустим, что яблок могло быть 21, 22, 23, 24 или 25. Однако осознание условия *«половина и еще пол-яблока»* приводит к выводу, что количество яблок — нечетное число. Остаются числа 21, 23 и 25. Из выделенных чисел лучше всего проверить первым среднее по величине — 23.

Если все условия выполняются, то решение найдено, в противном случае, в зависимости от полученного в ходе проверки результата, следует сделать еще одну пробу.

Примеры задач, решаемых с «конца»

1*. Было 20 яблок. Съели 7 яблок. Верны ли высказывания?

- Яблок осталось $\frac{1}{2}$ от того, что было, да еще 3 яблока.
- Яблок осталось $\frac{3}{5}$ от того, что было, да еще одно яблоко.

2. Рыбак поймал 8 окуней и еще половину улова. Каков весь улов?

3. Кирпич весит 2 кг и еще треть собственного веса. Сколько весит кирпич?

4. На одну чашку весов положили кусок сыра, а на другую — $\frac{3}{4}$ такого же куска и еще гирю в 1 кг. Установилось равновесие. Найди массу куска сыра.

5*. Если лиса Алиса даст коту Базилио 10 монет, то монет у них станет поровну. Сколько монет у них было первоначально?

6*. Встретились однажды крокодил Гена и Чебурашка. Гена угостил друга пятью яблоками. После этого у него осталась половина всех яблок и еще 2 яблока. Сколько яблок было у крокодила Гены?

7*. Водяной поймал 8 лягушек. На завтрак он съел 4 лягушки, на обед — половину остатка и еще 2 лягушки. Удастся ли Водяному поужинать?

Не для печати

8*. У Маши на 6 конфет больше, чем у Кати. Сколько конфет Маша должна отдать Кате, чтобы конфет у них стало поровну?

9. На трех деревьях сидели 36 галок. Когда с первого дерева перелетели на второе 6 галок, а со второго на третье — 4 галки, то на всех трех деревьях птиц оказалось поровну. Сколько галок было первоначально на каждом дереве?

10*. У Знайки на книжной полке стояли книги. Если сначала взять половину всех книг и еще 5 книг, а затем четвертую часть остатка и еще 3 книги, то на полке останется 9 книг. Сколько всего книг у Знайки на полке?

11*. Мальвина испекла 4 пирожка с капустой, 8 пирожков с малиной и 13 пирожков с вишней. Буратино съел $\frac{1}{5}$ часть всех пирожков и еще 2 пирожка, а Пьеро — половину остатка и еще 1 пирожок. Сколько пирожков осталось на тарелке?

12*. Доктор Айболит отправился в Африку лечить больных обезьянок и взял с собой фрукты. Когда он отдал им 12 кг фруктов, то у него осталась половина всех фруктов и еще 8 кг. Сколько килограммов фруктов привез в Африку Айболит?

13*. Красная Шапочка несла бабушке 18 пирожков. По дороге ей встретился серый волк. Девочка отдала ему третью часть всех пирожков и еще 2 пирожка. Косолапый мишка полакомился половиной оставшихся пирожков и еще 1 пирожком. Сколько пирожков Красная Шапочка донесла до бабушки?

14*. Доктор Айболит вылечил в первый день 100 зверей, а во второй — оставшуюся третью часть всех зверюшек. Сколько больных зверей вылечил добрый доктор за 2 дня?

15. Курочка Ряба снесла несколько яиц. Бабка положила яйца на стол и вышла на улицу. Мышка бежала, хвостиком махнула, половина яиц упала и разбилась. Пришла бабка, пересчитала яйца и видит, что осталась третья часть всех яиц и еще 2 яйца. Сколько яиц снесла курочка Ряба?

16*. Аленушка принесла из леса орехи. Половину орехов она отдала братцу Иванушке, а половину оставшихся — доброму молодцу. Последние 10 орехов Аленушка съела сама. Сколько орехов принесла Аленушка из леса?

17*. Малыш целый год копил для Карлсона конфеты. В первый день Карлсон съел половину всех конфет и еще 2 конфеты, во второй — $\frac{1}{2}$ оставшихся конфет и еще 3 конфеты, в третий день — половину нового остатка и последние 10 конфет. Сколько конфет Малыш подарил Карлсону?

18*. В запасе у лягушки-квакушки было несколько сушеных комариков. В первый день она съела третью часть всех комариков, во второй — третью часть остатка, в третий — третью часть нового остатка. После этого у нее осталось 16 комариков. Сколько сушеных комариков было у лягушки-квакушки первоначально и какое количество комариков она съедала каждый день?

19*. Муха-Цокотуха отправилась на базар покупать самовар. В первый день она пролетела половину всего пути и еще 6 км, во второй — $\frac{1}{2}$ оставшегося пути и еще 4 км, в третий — половину нового остатка и последние 3 км. Сколько километров пролетела Муха-Цокотуха, чтобы купить на базаре самовар?

20*. Маленький Мук сорвал несколько волшебных слив и принес их в за́мок. Он отдал принцессе половину всех слив и еще $\frac{1}{2}$ сливы, султану — половину оставшихся слив и еще $\frac{1}{2}$ сливы. После этого у него осталось 3 сливы, а у принцессы и у султана оказалось целое число слив. Сколько слив сорвал Мук?

21*. За четыре дня Буренка кота Матроскина дала некоторое количество молока. Из половины всего молока и еще 5 л он сделал творог, из $\frac{1}{2}$ оставшегося молока он сделал сметану. После этого в бидоне осталось 10 л молока. Сколько литров молока давала Буренка ежедневно, если в каждый день молока было одинаковое количество?

22*. Вечером Шарик разлил 48 л молока в три фляги. Когда кот Матроскин увидел, что Шарик разлил молоко неравномерно, он уравнял количество молока во флягах. Сначала Матроскин из первой фляги перелил 6 л во вторую, а затем из второй перелил в третью 4 л. Сколько литров было в каждой фляге у Шарика?

23*. Однажды бременские музыканты отправились из Тридевятого царства в Тридесятое. Шли они 3 дня. В первый день они прошли $\frac{1}{2}$ часть всего пути и еще 4 км, во второй день — $\frac{1}{2}$ оставшегося пути и еще 3 км. В третий, последний день они прошли половину нового остатка и последние 2 км. Сколько километров от Тридевятого царства до Тридесятого?

Задачи на совместную работу

Эти задачи относятся к задачам на процессы. Их отличительной особенностью является наличие в условии только одной величины, характеризующей процесс работы (времени), тогда как для определения неизвестной величины необходимо, чтобы было известно две величины. Решение задач данного вида основывается на условном принятии неизвестной величины (работы) за единицу.

Подготовительная работа

Цели подготовительной работы:

— актуализировать знания учащихся о величинах *объем работы*, *производительность*, *время* и взаимосвязи между ними, выраженной в формуле работы;

— уточнить неявные (без введения термина) представления учеников об общем кратном нескольких чисел;

— потренировать в расположении дробных чисел с разными знаменателями на числовом луче;

— сформировать умение делить отрезок на равные части.

Примеры подготовительных упражнений

1. Обозначь на числовом луче числа $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{4}$ и т. п. (Длина единичного отрезка должна быть кратна 12.)

2. Единичный отрезок какой длины нужно изобразить, чтобы разместить на нем числа $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{5}{6}$ и т. п.? (Длина единичного отрезка должна быть кратна 18.)

3. Начерти отрезок, который удобно разделить на 3 и на 5 частей. Сколько единичных отрезков в $\frac{1}{3}$, в $\frac{2}{5}$, в $\frac{7}{15}$ частях отрезка?

4. Назови несколько чисел, которые делятся и на 2, и на 3.

5. Определи закономерность и продолжи числовой ряд: а) 6, 12, 18, …; б) 18, 36, 54, … . Что интересного в этих числах?

6. Вася проходит расстояние между школой и домом за 15 мин. Какую часть пути он проходит за 1 мин, 2 мин, 3 мин, 5 мин?

7. Мастер делает всю работу за 2 ч, а его ученик — за 4 ч. Какую часть работы делает каждый из них за 1 ч? Какую часть работы сделают они вместе за 1 ч? При совместной работе им потребуется больше или меньше двух часов? Почему? За какое время они сделают всю работу, если будут работать вместе?

8. Через большую трубу бассейн наполняется водой за 6 ч, а через маленькую — за 12 ч. Первая труба работала 1 ч, а вторая — 5 ч. Какую часть бассейна они заполнили? Какую часть бассейна осталось заполнить? Какая часть бассейна будет заполнена после 1 ч совместной работы? После двух, трех, четырех часов?

Методы решения задач на совместную работу

З а д а ч а. Из-под земли бьют три источника. Первый заполняет бассейн за 2 дня, второй — за 4 дня, а третий — за 8 дней. За какое время наполнят бассейн все три источника вместе?

Графический метод

В данной задаче можно выделить три величины: 1) объем работы — неопределенное неизвестное; 2) скорость выполнения работы (производительность); 3) временные затраты (время). Общий способ решения задач такого типа (на совместную работу) основывается на условном принятии неизвестного объема работы за единицу и нахождении общей производительности с помощью алгоритма сложения обыкновенных дробей с разными знаменателями, которым младшие школьники еще не владеют. Тем не менее решение этой задачи вполне можно осуществить графическим методом и после изучения темы «Дроби» в начальном курсе математики.

Рассуждения строятся таким образом: если источники заполняют бассейн за 2 дня, 4 дня, 8 дней, то за один день они заполнят $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ части бассейна соответственно. Обозначив условной геометрической фигурой (например, прямоугольником или отрезком) объем работы и отметив скорость

Не для печати

заполнения бассейна каждым из источников, получим наглядное представление об общей производительности.

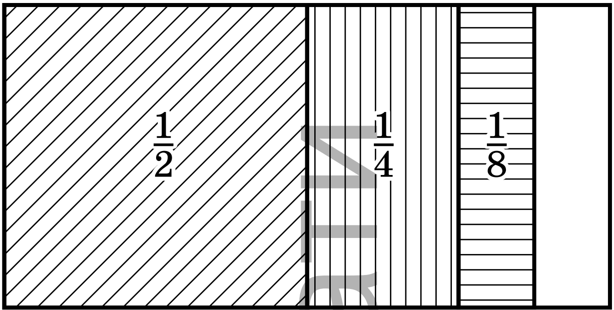

Рис. 23

Из рисунка видно, что при одновременной работе трех источников в течение одного дня заполняется практически весь бассейн, а следовательно, ответ (правда, не совсем точный) формулируется и без выполнения арифметических действий с дробями.

Замечание: решение задач на совместную работу графическим методом на начальном этапе обучения математике возможно лишь в случае наличия в условии небольших числовых данных, наибольший общий делитель которых очевиден, например: (2, 4, 8); (3, 6); (3, 5)...

Арифметический метод

Предложенную задачу можно решить иначе, выполнив арифметические действия.

1) $8 : 2 = 4$ — бассейна заполнит первый источник за 8 дней;

2) $8 : 4 = 2$ — бассейна заполнит второй источник за 8 дней;

3) $1 + 4 + 2 = 7$ — бассейнов заполнят все источники вместе за 8 дней;

4) $7 : 8 = \frac{7}{8}$ — часть бассейна, которую заполнят все источники вместе за 1 день, т. е. время заполнения бассейна тремя источниками вместе — чуть больше одного дня.

Другой способ арифметического метода решения задач на совместную работу основан на замене неопределенного неизвестного (объема работы) каким-то конкретным числом, кратным числом из условия задачи.

Пусть бассейн вмещает 40 л воды, тогда:

1) 40 : 2 = 20 (л/день) — производительность первого источника;

2) 40 : 4 = 10 (л/день) — производительность второго источника;

3) 40 : 8 = 5 (л/день) — производительность третьего источника;

4) 20 + 10 + 5 = 35 (л/день) — общая производительность;

5) 40 : 35 > 1 (дн.) — время заполнения бассейна при одновременном действии всех источников.

Замечание: важно, что, какое бы число ни приняли за неопределенное неизвестное, ответ будет такой же.

Примеры задач на совместную работу

1*. Карлсон съедает банку варенья за 3 мин, а Малыш — в 4 раза медленнее. Как скоро закончится варенье в банке, если Малыш и Карлсон будут есть его вместе?

2*. Карлсон может съесть бочку меда за 10 дней, а Винни-Пух — за две недели. За сколько дней они смогут съесть весь мед из бочки, если будут есть вместе?

3*. Малыш Томми может съесть коробку печенья за 12 дней, а с Чаки они съедают ту же коробку за 8 дней. За сколько дней съест такую же коробку печенья Чаки?

4*. Волк пригласил на свой день рождения 7 козлят, 3 поросенка и Красную Шапочку. Козлята съедают праздничный торт за 5 мин, поросята — в 3 раза медленнее, а Красной Шапочке хватит этого лакомства на целый час. За какое время гости съедят торт?

5*. Черепаха и улитка — соседи. Черепаха ползет от дома до пригорка 3 ч, а улитка — от пригорка до дома — 4 ч. Через какое время они встретятся, если черепаха и улитка начнут движение одновременно навстречу друг другу?

6*. Одним и тем же количеством сена можно прокормить корову Мурку в течение 60 дней, а Конька-горбунка — в течение 20 дней. На сколько дней хватит этого сена для коровы и Конька вместе при той же дневной норме?

7*. Папа Карло открыл мастерскую по производству деревянных игрушек. Он может изготовить за 8 ч 6 игрушек, а его подмастерье — за 12 ч только 3 игрушки. Сколько деревянных игрушек каждый час производит мастерская папы Карло?

8*. Мать-коза съедает кочан капусты за 3 мин, а ее семеро козлят — за 5 мин. Через какое время от этого кочана капусты останется лишь кочерыжка?

9*. Ниф-Ниф может построить дом из соломы за 10 ч, Наф-Наф — за 12 ч, а Нуф-Нуф — за 15 ч. За сколько часов они построят себе дом из соломы, работая вместе?

10*. Из двух портов одновременно навстречу друг другу вышли теплоход и катер. Известно, что теплоход проходит это расстояние за 5 ч, а катер — за 10 ч. Через какое время теплоход и катер встретятся?

11*. До дня рождения Незнайки осталось 15 дней. Винтик и Шпунтик решили подарить другу газированный автомобиль. Винтик может сделать его за 6 недель, а Шпунтик — в 2 раза быстрее. Успеют ли они сделать автомобиль?

12*. Дядя Федор преодолевает расстояние от города до Простоквашино за 16 ч, а Шарик — за 8 ч. Через какое время они встретятся, если Дядя Федор и Шарик выйдут одновременно навстречу друг другу из города и Простоквашино?

13*. За сколько дней Дядя Федор, Шарик и кот Матроскин вскопают поле под картофель, работая совместно, если первый может выполнить эту работу за 6 дней, второй — за 10, а третий — за 15 дней?

14*. У царя было три сына: старший, средний и Иван-дурак. Царь дал им задание соткать ковер невиданной красоты. Старший сын справился с заданием за 1 день, средний — за 2 дня, а Иван-дурак — за 3 дня. За какое время они соткали бы ковер вместе?

15*. Том Сойер может покрасить забор за 4 ч, а его более трудолюбивый друг Гек Финн выполняет эту работу в 2 раза быстрее. За какое время они покрасят забор, если будут работать вместе?

16*. Червяк-папа съедает гриб за 2 дня. Червяк-мама съедает такой же гриб за 3 дня, а червяк-сынишка — за 6 дней. За какое время съест гриб эта семейка? За какое время они съедят гриб, если к ним присоединится улитка, съедающая гриб за один день?

17*. Три поросенка Наф-Наф, Ниф-Ниф, Нуф-Нуф строят дом из соломы. Успеют ли они построить дом за 1 день, если Наф-Наф смог бы построить дом в одиночку за 2 дня, Ниф-Ниф — за 4, а Нуф-Нуф — за 16 дней?

18*. Медоносные пчелы собирают сладкий нектар с цветов и приносят его в свои улья-гнезда. Для того чтобы заполнить улей стандартных размеров, пчелам первого двора достаточно 4 дня, пчелам второго двора — 8, а пчелам третьего двора — 16 дней. За какое время заполнят улей стандартных размеров пчелы трех дворов, собирая мед вместе?

19*. Незнайка преодолевает расстояние от Цветочного до Солнечного города за 2 ч, а Винтик на газированном автомобиле — за 30 мин. Через сколько минут они встретятся, если друзья начнут движение одновременно навстречу друг другу из Цветочного и Солнечного города?

Задачи на движение

В основе выделения этого вида задач в отдельную группу лежит их содержание: традиционно к ним относятся задачи, связанные с величинами *скорость*, *время*, *расстояние*, — на движение одного или двух объектов, перемещающихся с разной или одинаковой скоростью, по прямым или кривым траекториям, с остановками или без них, сближающихся, удаляющихся, двигающихся по течению реки или против течения.

Их можно распределить на четыре группы.

1. Задачи на вертикальное движение со спуском.
2. Задачи на движение одного объекта между двумя сближающимися объектами.
3. Задачи на движение мимо объектов с учетом их протяженности.
4. Задачи на движение объектов, перемещающихся в одном направлении (вдогонку, с отставанием).

Подготовительная работа

Цели подготовительной работы:

— актуализировать знание учащимися зависимости между величинами, характеризующими процесс движения (*скорость движения*, *время*, *расстояние*), и способность к ее использованию при решении задач на движение одного объекта;

— актуализировать представление о скорости как величине, которая характеризует быстроту движения;

— систематизировать знания о единицах времени, длины, скорости и соотношениях между ними (поскольку при решении задач на движение от учащихся потребуется уме-

Не для печати

ние работать с именованными числами, выраженными в единицах разных наименований, т. е. осуществлять перевод одних единиц измерения длины, времени, скорости в другие).

Примеры подготовительных упражнений

1. Толе от школы до дома надо пройти 520 м, а Коле — 580 м. Кто из мальчиков живет ближе к школе? Кто из них тратит на дорогу меньше времени? Кто из них идет быстрее?

2. Вася идет до школы 15 мин, а Петя — 10 мин. Кто из них тратит на дорогу меньше времени? Кто из мальчиков идет быстрее?

Замечание: для ответа на последние вопросы в задачах 1 и 2 недостаточно данных, поскольку это зависит от скорости.

3. За одно и то же время велосипедист проезжает 30 км, а пешеход проходит 10 км. У какого из объектов движения скорость больше и во сколько раз?

4. Расстояние между городом и Простоквашино Дядя Федор преодолевает за 3 ч, а Шарик — за 30 мин. Кто движется быстрее? Во сколько раз?

5. Расстояние между городами A и B равно 100 км. Велосипедист выехал из города A в 7 ч утра со скоростью 10 км/ч. Во сколько часов велосипедист будет в городе B? На каком расстоянии от города A велосипедист будет в полдень? На каком расстоянии от пункта B велосипедист будет через 2 ч от начала движения? При каком условии время движения будет в 2 раза меньше?

Методы решения задач на движение

З а д а ч а 1 (на вертикальное движение со спуском). В воскресенье утром гусеница начала вползать на дерево. В течение дня она вползала на высоту 5 м, а в течение ночи спускалась на 2 м. В какой день гусеница достигнет высоты 9 м?

Арифметический метод

1) $5 - 2 = 3$ (м) — за сутки;
2) $3 \cdot 2 = 6$ (м) — через двое суток;
3) $9 - 6 = 3$ (м) — осталось преодолеть;
4) $2 + 1 = 3$ (дн.).

Замечание: считается, что гусеница все время движется равномерно.

Решение арифметическим методом следует сопровождать схемой.

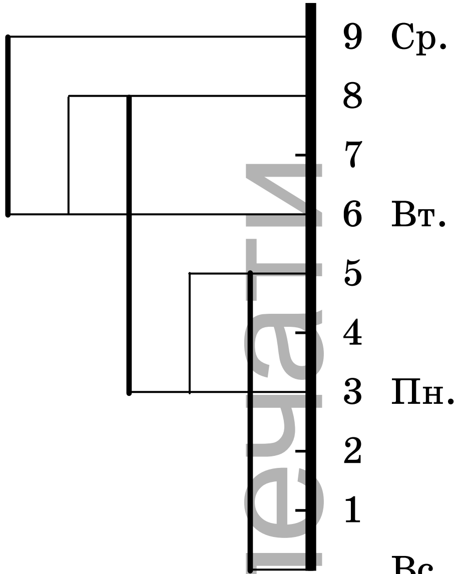

Рис. 24

Задача 2 (на движение одного объекта между двумя сближающимися объектами). Два города, A и B, находятся на расстоянии 300 км друг от друга. Из этих городов одновременно выезжают навстречу друг другу два велосипедиста и мчатся, не останавливаясь, со скоростью 50 км/ч. Вместе с первым велосипедистом из города A вылетает муха, пролетающая в час 100 км. Муха опережает первого велосипедиста, летит навстречу второму, выехавшему из города B. Встретив его, она сразу поворачивает назад и, повстречав первого велосипедиста, летит обратно ко второму. Так продолжает она свои полеты до тех пор, пока велосипедисты не встретятся. Сколько километров пролетела муха?

Часто при решении такого вида задач ученики пускаются в разные «тонкие» и очень сложные выкладки и соображения, не уяснив главного: время полета мухи совпадает с временем движения велосипедистов. Определив его по данным в условии задачи числам и зная скорость полета мухи (100 км/ч), легко решить задачу. Полезно переформулировать условие задачи, указав все необходимые для решения сведения и отбросив данные и отношения, осложняющие задачу.

не для печати

Тогда текст задачи станет следующим: «Из городов A и B, расстояние между которыми 300 км, одновременно навстречу друг другу выезжают два велосипедиста и мчатся, не останавливаясь, со скоростью 50 км/ч, пока не встретятся. Какое расстояние пролетит за это время муха, если ее скорость равна 100 км/ч?»

Арифметический метод

Способ 1

1) $50 + 50 = 100$ (км/ч) — скорость сближения велосипедистов;

2) $300 : 100 = 3$ (ч) — время в пути до встречи;

3) $100 \cdot 3 = 300$ (км) — пролетит муха.

Способ 2

1) $300 : 2 = 150$ (км) — проехал каждый велосипедист;

2) $100 : 50 = 2$ (раза) — скорость мухи больше скорости велосипедиста;

3) $150 \cdot 2 = 300$ (км) — пролетит муха.

Задача 3 (на движение объектов, перемещающихся в одном направлении). Мышке до норки 20 шагов. Кошке до мышки 5 прыжков. За один прыжок кошки мышка делает 3 шага. Один прыжок кошки равен 10 шагам мышки. Догонит ли кошка мышку?

Арифметический метод

Способ 1

1) $20 : 10 = 2$ (пр.) — кошке от мышки до норки;

2) $5 + 2 = 7$ (пр.) — кошке до норки;

3) $3 \cdot 7 = 21$ (шаг) — за это время сделает мышка;
$21 > 20$, не догонит.

Способ 2

1) $10 - 3 = 7$ (шаг.) — скорость сближения кошки и мышки;

2) $5 \cdot 10 = 50$ (шаг.) — начальное расстояние между ними;

3) $50 : 7 \approx 7$ (пр.) — надо сделать кошке, чтобы догнать мышку;

4) $3 \cdot 7 = 21$ (шаг.) — сделает за это время мышка; $21 > 20$.

Способ 3

1) $5 \cdot 10 = 50$ (шаг.) — начальное расстояние между кошкой и мышкой;

2) 50 + 20 = 70 (шаг.) — начальное расстояние между кошкой и норкой;

3) 70 : 10 = 7 (пр.) — кошке до норки;

4) 3 · 7 = 21 (шаг) — сделает мышка; 21 > 20.

Графический метод

Для решения графическим методом нужно расположить движущиеся объекты на координатном луче: кошку в точке с координатой 0, мышку в точке с координатой 50, норку в точке с координатой 70, а затем выполнить движение по координатному лучу:

шаг 1 — кошка перемещается в точку с координатой 10, а мышка — в точку с координатой 53 (50 + 3);

шаг 2 — кошка перемещается в точку с координатой 20, а мышка — в точку с координатой 56 (53 + 3) и т. д.;

шаг 7 — кошка перемещается в точку с координатой 70 (т. е. туда, где расположена норка), а мышка — в точку с координатой 71. 70 < 71, значит, мышка будет уже в норке.

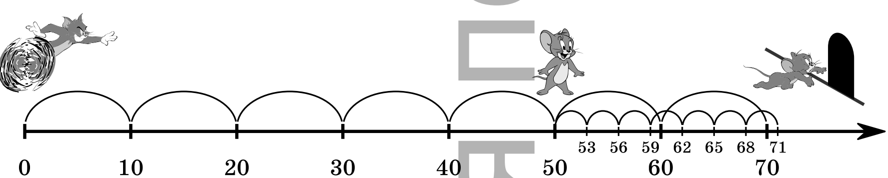

Рис. 25

Примеры задач на движение

1*. Черепаха и улитка — соседи. Черепаха ползет от дома до пригорка 40 мин, а улитка — 30 мин. Через сколько минут улитка догонит черепаху, если она выйдет на 5 мин раньше?

2. Самолет пролетит расстояние от Москвы до Владивостока за 9 ч, а поезд преодолеет его за 9 суток. Во сколько раз быстрее можно добраться от Москвы до Владивостока на самолете, чем на поезде?

3. Турист прошел расстояние от базы до поселка за 12 ч. За сколько часов проедет велосипедист расстояние, в 2 раза большее, чем прошел турист, если будет двигаться в 3 раза быстрее пешехода?

4*. Незнайка вышел пешком из Солнечного города в Цветочный город в 5 ч утра, а в полдень в этом же направлении выехали на газированном автомобиле Винтик и Шпунтик.

Незнайка проходит 5 км в каждый час, а автомобиль едет со скоростью 12 км/ч. На каком километре пути Винтик и Шпунтик догонят Незнайку?

5*. Расстояние от дома папы Карло до школы равно 2 км 500 м. По дороге в школу Буратино заметил, что он прошел 1 км за $\frac{1}{5}$ ч и на оставшийся путь у него есть еще 20 мин. Успеет ли Буратино в школу, если будет идти с такой же скоростью?

6. Два туриста выехали на велосипедах в разное время и ехали с одинаковой скоростью. Когда второй турист проехал 5 км, то первый уже проехал 13 км. Через сколько километров пути первый турист проедет расстояние, в 2 раза большее, чем второй турист?

7. Два подмастерья отправились пешком из Виттенберга в Испанию. Первый проходил каждый день по 7 миль, а второй шел так: в первый день — 1 милю, во второй — 2 мили, в третий — 3 мили и так далее: в каждый следующий день он проходил на одну милю больше, чем в предыдущий. Через сколько дней они встретятся?

8. Автомобиль едет со скоростью 60 км/ч. На сколько он должен увеличить скорость, чтобы проезжать один километр пути на минуту быстрее?

9. Поезд длиной 18 м проезжает мимо столба за 9 с. Сколько времени ему понадобится, чтобы проехать мост длиной 36 м?

10. Расстояние между двумя машинами, едущими по шоссе, равно 200 км. Скорости машин 60 и 80 км/ч. Какое расстояние будет между ними через час?

11. Автомобиль едет со скоростью 60 км/ч. На сколько нужно увеличить скорость автомобиля, чтобы он проезжал один километр пути на полминуты быстрее?

12*. Расстояние между Винни-Пухом и Пятачком, движущимися по лесной дороге, равно 500 м. Какое расстояние будет между ними через 20 мин, если скорость движения Винни-Пуха равна 30 м/мин, а Пятачка — 70 м/мин?

13*. По дороге в одном и том же направлении идут Дядя Федор и почтальон Печкин. Вначале расстояние между ними было 2 км, но так как скорость Дяди Федора, идущего впереди, равна 4 км/ч, а скорость Печкина — 5 км/ч, то Печкин нагоняет Дядю Федора. С начала движения до того, как Печкин догонит Дядю Федора, между ними летает галчонок Хватайка со скоростью 8 км/ч. От почтальона Печкина он летит к идущему впереди Дяде Федору, долетев, возвращается обратно и так летает до тех пор, пока пешеходы не окажутся рядом. Какое расстояние пролетит за все это время галчонок?

14. Поезд проходит мост длиной 450 м за 45 с, а мимо телеграфного столба он едет 15 с. Вычисли длину и скорость поезда.

15*. Русалочка Ариэль проплывает расстояние от подводного царства до берега за 10 мин. Если бы она плыла в минуту на 10 м быстрее, то ей потребовалось бы на тот же путь 8 мин. Чему равно расстояние от подводного царства до берега?

16. Половину пути туристы шли пешком, а половину ехали автобусом, затратив на весь путь 5 ч 30 мин. Если бы весь путь они ехали автобусом, то затратили бы 1 ч. Сколько всего времени затратят туристы, если весь путь будут идти пешком? Во сколько раз быстрее ехать автобусом, чем идти пешком?

17. Кондуктор пассажирского поезда, скорость которого равна 50 км/ч, заметил, что встречный товарный поезд, идущий со скоростью 40 км/ч, прошел мимо него за 10 с. Определи длину товарного поезда.

18. Из города A в город B вышел поезд со скоростью 50 км/ч. Через 14 ч с аэродрома того же города вылетел самолет, который направился вдоль железной дороги в город B со скоростью, в 15 раз большей скорости поезда, и догнал его на полпути от A до B. Определи расстояние от города A до города B.

19. Если Аня идет в школу пешком, а возвращается автобусом, то вся дорога занимает полтора часа. Если же она едет автобусом туда и обратно, то дорога занимает 30 мин. Сколько времени потратит Аня на дорогу, если в школу и из школы она пойдет пешком?

20. Два туриста выходят одновременно из одного города в другой. Первый проходит 4 км за час, второй — 5 км за час, и поэтому он приходит на 1 ч раньше в другой город. Каково расстояние между городами?

21. Два велосипедиста одновременно выехали навстречу друг другу: первый из пункта A со скоростью 20 км/ч, второй из пункта B со скоростью 15 км/ч. Какой велосипедист будет ближе к пункту A в момент их встречи?

22. Саша заметил, что когда он ехал в школу на автобусе, а возвращался на троллейбусе, то на весь путь было затрачено 35 мин. Когда же он туда и обратно поехал на автобусе, то

Не для печати

потратил 40 мин. Сколько времени потратит Саша на путь в школу и обратно, если будет ехать на троллейбусе?

23*. Школа находится в 3 км от Простоквашино. Какое расстояние пройдет Дядя Федор за учебный год от дома до школы, если в учебном году 210 дней?

24. Пассажир поезда, идущего со скоростью 40 км/ч, заметил, что встречный пассажирский поезд, имеющий длину 75 м, прошел мимо его окна за 3 с. С какой скоростью шел встречный поезд?

25*. Гарри Поттер пролетит на метле от дома на Тисовой улице до Хогвартса за 12 мин. За сколько минут Гарри пролетит на волшебном автомобиле расстояние, в 2 раза большее, если будет двигаться в 3 раза быстрее, чем на метле?

26. Когда пассажир проехал половину всего пути, то лег спать и спал до тех пор, пока не осталось ехать половину того пути, что он проехал спящим. Какую часть пути он проехал спящим?

27*. Змея медленно ползет по джунглям. Заросли травы длиной 90 м она пересекла за 50 мин, а мимо ствола дерева ползла 5 мин. Какова длина змеи и ее скорость?

28*. Восемнадцатиметровый Удав проползает мимо Попугая за 9 мин. За какое время он проползет от Попугая до Слоненка, если расстояние между ними равно 36 м?

29*. Зайцу до норки надо сделать 40 скачков, а лисе до зайца надо сделать 10 прыжков. За один прыжок лисы заяц делает 3 скачка. Один прыжок лисы равен 10 скачкам зайца. Догонит ли лиса зайца?

30*. Винни-Пух полез на дерево ровно в полдень. Пчелиный рой находится на высоте 6 м. За 30 мин он вполз на высоту 2 м, но испугался жужжания пчел и очень быстро опустился на 1 м. В какое время он попадет к пчелам, если, поднимаясь каждый раз на 2 м, при их жужжании он вновь опускался на 1 м?

Не для печати

Решения и ответы

Задачи на предположение

1. 4 пуговицы по 4 р.; 6 пуговиц по 3 р.
2*. 11 пакетов по 5 кг; 15 пакетов по 3 кг.
3. 3 куклы; 7 мячей.
4. 7 наборов по 63 р.; 10 — по 87 р.
5*. 3 набора по 6 штук; 5 — по 10 штук.
6*. На 6 пескарей больше, чем окуней.
7*. 3 медведя; 5 лисиц.
8*. 3 учебника; 10 тетрадей.
9*. 8 девочек; 2 мальчика.
10. 7 транспарантов.
11*. 3 лошади; 9 кур.
12*. По 1 монете — 10 шариков; по 5 монет — 5 шариков; по 10 монет — 1 шарик.
13*. 2 шестиместные лодки; 4 четырехместные лодки.
14*. 6 горшков по 8 л; 3 горшка по 4 л.
15*. 2 больших и 3 маленьких шарика.
16*. 5 шестиместных лодок; 7 четырехместных лодок.
17*. 20 соплохвостов; 20 учеников.
18*. 2 волка; 8 медведей.
19*. 20 билетов по 40 к.; 10 билетов по 60 к.
20*. 5 пирожков с мясом; 10 пирожков с капустой.
21*. 4 хомяка; 2 попугая.
22*. 8 банок по 3 кг; 3 банки по 2 кг.
23*. 3 двухместные комнаты; 3 четырехместные комнаты.
24*. 10 двухэтажных домов.

Не для печати

Задачи на замену данных

1. 1) 100 – 50 = 50 (г) — *яблоко тяжелее груши*; 2) 300 – – 50 = 250 (г) — *масса 2 груш*; 3) 250 : 2 = 125 (г) — *масса 1 груши*; 4) 125 + 50 = 175 (г) — *масса яблока*. Проверка: 125 + 175 = 300.

2*. Масса волка 40 кг, масса рыси 32 кг.

3*. 30 кг, 10 кг.

4*. 1) $250 \cdot 2 = 500$ (раков.) — вместо 250 жемчужин; 2) $500 + 140 = 640$ (раков.) — *всего*; 3) $1920 : 640 = 3$ (мон.) — *цена одной раковины*; 4) $3 \cdot 2 = 6$ (мон.) — *цена одной жемчужины*; 5) $6 \cdot 250 = 1500$ (мон.) — *можно выручить с продажи жемчужин*.

5*. 1 кг.

6*. 35 лисиц.

7*. 1) 1 ч 30 мин (90 мин) $\cdot$ 6 = 540 мин (9 ч) — *шел пешком вместо поездки на автомобиле*; 2) $9 + 3 = 12$ (ч) — *время на весь путь пешком*; 3) $12 : 6 = 2$ (ч) — *время на весь путь на автомобиле*.

8*. 1) $12 \cdot 2 = 24$ (гр.) — *вместо 12 яблонь*; 2) $24 + 6 = 30$ (гр.) — *всего*; 3) $450 : 30 = 15$ (кг) — *с одной груши*; 4) $15 \cdot 2 = 30$ (кг) — *с одной яблони*; 5) $30 \cdot 12 = 360$ (кг) — *яблок*; 6) $450 - 360 = 90$ (кг) — *груш*.

9*. Если бы вместо 8 бидонов было 8 банок, то молока было бы меньше на $15 \cdot 8 = 120$ л, т. е. $200 - 120 = 80$ л уместилось бы в $8 + 8 = 16$ банках, значит, в 1 банке $80 : 16 = 5$ л, а в 1 бидоне $5 + 15 = 20$ л. В деревенский магазин отвозят $\frac{1}{4}$ часть молока, т. е. $200 : 4 = 50$ л ($20 + 20 + 5 + 5$ или $20 + 5 \cdot 6$).

10*. 1) $8 \cdot 2 = 16$ (яб.) — *вместо 8 груш*; 2) $10 + 16 + 3 = 29$ (яб.) — *всего*; 3) $1 \cdot 3 = 3$ (р.) — *на столько дороже стоят 3 лимона, чем 3 яблока*; 4) $148 - 3 = 145$ (р.) — *стоят 29 яблок*; 5) $145 : 29 = 5$ (р.) — *цена яблока*; 6) $5 \cdot 2 = 10$ (р.) — *цена груши*; 7) $5 + 1 = 6$ (р.) — *цена лимона*.

11*. Так как скорость полета в 3 раза больше скорости пешего хода, то одно и то же расстояние Карлсон пролетит в 3 раза быстрее, чем пройдет пешком. 1) $1 + 3 = 4$ — *части в 8 часах* (1 часть времени Карлсон летел, 3 части — шел пешком); 2) $8 : 4 = 2$ (ч) — *летел*; 3) $24 : 2 = 12$ (км/ч) — *скорость полета*; 4) $48 : 12 = 4$ (ч) — *общее время полета*; 5) $8 - 4 = 4$ (ч) — *сэкономил*. Или: 3) $2 \cdot 2 = 4$ (ч); 4) $8 - 4 = 4$ (ч).

12*. Масса чайной ложки 8 г, масса столовой ложки 16 г. Масса 10 чайных ложек равна массе 5 столовых ложек.

13*. 45 денежек заплатила бы Муха-Цокотуха за 1 кг черники (30 ден.) и 1 кг малины (15 ден.).

14*. 96 км ехал на велосипеде, 224 км — на автомобиле.

15*. Масса мальчика равна массе двух поросят.

16*. 600 миль на ковре-самолете, 120 миль на спине джинна.

17*. 1) $20 : 2 = 10$ (торт.) — *вместо 20 конфет*; 2) $5 \cdot 2 = 10$ (торт.) — *вместо пирогов*; 3) $10 + 10 + 10 = 30$ (торт.) — *всего*; 4) $210 : 30 = 7$ (кг) — *масса торта*; 5) $7 \cdot 2 = 14$ (кг) — *масса пирога*; 6) 7 кг = 7000 г, $7000 : 2 = 3500$ (г) — *масса конфеты*. К задаче можно выполнить рисунок, обозначив объекты задачи прямоугольниками, длина которых пропорциональна количественным характеристикам объектов. При этом замена будет очевидной.

18*. 1) $10 \cdot 3 = 30$ (кус.) — *смородины вместо 10 яблонь*; 2) $30 + 5 = 35$ (кус.) — *смородины всего*; 3) $210 : 35 = 6$ (вед.) — *под один куст смородины*; 4) $6 \cdot 5 = 30$ (вед.) — *под все кусты смородины*; 5) $210 - 30 = 180$ (вед.) — *под все яблони*.

Задачи на отыскание чисел по их сумме, разности или кратному отношению

1*. 20 км; 30 км; 10 км.

2*. Количество бананов кратно 2 и 3, т. е. на них приходится 6 частей, на ананасы $6 : 2 = 3$ части, на кокосы $6 : 3 = 2$ части, всего $6 + 3 + 2 = 11$ частей; $165 : 11 = 15$ (фр.) — *в одной части*; $15 \cdot 6 = 90$ (бан.), $15 \cdot 3 = 45$ (ан.), $15 \cdot 2 = 30$ (кок.). Проверка: $90 + 45 + 30 = 165$.

3*. 26 зверей.

4*. 5 см, 7 см и 4 см.

5. 1) $33 - 6 - 1 = 26$ (пт.) — *ласточек, соловьев и галок*; 2) $26 - 3 - (3 + 5) = 15$ (пт.) — *если бы всех птиц было как соловьев*; 3) $15 : 3 = 5$ (сол.); 4) $5 + 3 = 8$ (ласт.).

6*. Так как Тимофею 6 лет, а Ивану 9 лет, то Марусе может быть 7 лет или 8 лет.

7*. 351 год.

8*. Винни-Пух съел 13 банок, Пятачок — 3 банки, Иа — 5 банок.

9. Общее количество карандашей может быть равно 47, 38, 29. Проверим первое из них (решение надо обязательно проиллюстрировать схемой): 1) $47 + 13 = 60$ (кар.) — *если у Светы столько же карандашей, сколько у Раи*; 2) $60 : 4 = 15$ (кар.) — *у Раи*; 3) $15 - 13 = 2$ (кар.) — *у Светы*; 4) $15 \cdot 2 = 30$ (кар.) — *у Кати*. Проверка: $30 + 2 + 15 = 47$. Остальные числа (38 и 29) не подходят.

10. 18 белых роз; 6 красных.

11. 1) $560 + 16 = 576$ (гол.) — *стало*; 2) $15 + 1 = 16$ (частей) — *в общем количестве голов*; 3) $576 : 16 = 36$ (гол.) — *коров стало*; 4) $36 - 16 = 20$ (гол.) — *коров было*.

Не для печати

12. 1) $12 : 3 = 4$ (ваг.) — *в одной части*; 2) $4 + 6 = 10$ (ваг.) — *было в первом составе*; 3) $4 \cdot 4 + 6 = 22$ (ваг.) — *было во втором составе*.

13. 15 см.

14*. 14 конфет; 23 конфеты.

15*. 12 кустов.

16*. 6 км; 12 км; 18 км.

17*. 7 яиц; 21 яйцо; 24 яйца (7; 21; 23).

18*. 18 дм.

19*. 120 кг.

20*. 1) $479 + 17 = 496$ (жив.) — *стало*; 2) $1 + 15 = 16$ (частей) — *в общем количестве животных*; 3) $496 : 16 = 31$ (св.) — *стало*; 4) $31 - 17 = 14$ (св.) — *было*.

21*. 16; 48; на 32.

22*. 100 кг.

Задачи, решаемые с «конца»

1*. Да.

2. 16 р.

3. 3 кг.

4. 1 кг — это $\frac{1}{4}$ куска сыра, значит, сыр весит 4 кг.

5*. Ответом могут быть любые два числа, одно из которых на 20 больше другого, например 30 и 10.

6*. 14 яблок.

7*. Нет, так как все лягушки съедены за завтраком и обедом.

8*. 3 конфеты.

9. 1) $36 : 3 = 12$ (гал.) — *стало на каждом дереве*; 2) $12 + 6 = 18$ (гал.) — *было первоначально на первом дереве*; 3) $12 - 4 = 8$ (гал.) — *было первоначально на третьем дереве*; 4) $36 - (18 + 8) = 10$ (гал.) — *было первоначально на втором дереве*. Проверка: $18 + 8 + 10 = 36$.

10*. 1) $9 + 3 = 12$ (кн.) — $\frac{3}{4}$ *остатка*; 2) $12 : 3 \cdot 4 = 16$ (кн.) — *остаток*; 3) $16 + 5 = 21$ (кн.) — *половина всех книг*; 4) $21 \cdot 2 = 42$ (кн.) — *всего книг*.

11*. 8 пирожков.

12*. 40 кг.

13*. 4 пирожка.

14*. 150 зверей.

Не для печати

15*. 2 яйца — это $\frac{1}{6}$ общего количества яиц, значит, курочка Ряба снесла 12 яиц.

16*. 40 орехов.

17*. 96 конфет.

18*. Всего было 54 комарика, в первый день лягушка съела 18, во второй — 12, а в третий — 8 комариков. *Замечание*: решение аналогично задаче 13.

19*. 32 км.

20*. 15 слив.

21*. Всего 40 л, по 10 л ежедневно.

22*. 22 л; 14 л; 12 л.

23*. 36 км.

Задачи на совместную работу

1*. За 12 мин они вместе съедят 5 банок варенья; 1 банку — за $\frac{12}{5}$, т. е. примерно за две с половиной минуты.

2*. 1) $10 : 2 = 5$ (дн.) — *потребуется, если оба будут есть со скоростью Карлсона*; 2) $14 : 2 = 7$ (дн.) — *потребуется, если оба будут есть со скоростью Винни-Пуха*; 3) $(5 + 7) : 2 = 6$ (дн.).

3*. 24 дня.

4*. Примерно за три с половиной минуты $\left(\text{за 60 мин все вместе съедят 17 тортов, } 60 : 17 = 3\frac{1}{2}\right)$.

5*. Примерно через 2 ч.

6*. Способ 1. За 60 дней корова Мурка съест 1 порцию сена, а Конек-горбунок $60 : 20 = 3$ порции. Вместе они съедят 4 порции за 60 дней. $60 : 4 = 15$ (дн.). Способ 2. 1) $60 : 20 = 3$ — *раза быстрее ест Конек-горбунок*; 2) $1 + 3 = 4$ — *части в одной порции сена*; 3) $20 : 4 \cdot 3 = 15$ или $60 : 4 = 15$ — *корова Мурка съест* $\frac{1}{4}$ *часть, а Конек* — $\frac{3}{4}$ *части*.

7*. Так как папа Карло может изготовить за 8 ч 6 игрушек, то за 4 ч — 3 игрушки, а за 12 ч — 9 игрушек. $9 + 3 = 12$ — *игрушек изготовят вместе за 12 ч папа Карло и подмастерье*; $12 : 12 = 1$ — *игрушка в час*.

8*. Примерно через 2 мин.

9*. За 60 ч Ниф-Ниф построит 6 домов, Наф-Наф — 5 домов, Нуф-Нуф — 4 дома. Все вместе — 15 домов. $60 : 15 = 4$ часа.

Не для печати

10*. Примерно через 3 ч.

11*. Да, так как потребуется 2 недели; 14 дней < 15 дней.

12*. 1) 16 : 8 = 2 — *расстояние от города до Простоквашино пробежит за 16 ч Шарик*; 2) 2 + 1 = 3 — *расстояние пройдут вместе за 16 ч*; 3) 16 : 3 = 5 (ч) — *примерное время в пути до встречи*.

13*. За 3 дня.

14*. За полдня, т. е. за 12 ч.

15*. За 1 ч 20 мин.

16*. За один день; за полдня.

17*. Не успеют — потребуется чуть больше чем один день.

18*. Примерно за 2 дня.

19*. Через 24 мин.

Задачи на движение

1*. Улитка догонит черепаху ровно на середине пути, т. е. через 15 мин. *Замечание*: можно зафиксировать решение задачи в таблице, отмечая дробью ту часть пути, которую пройдет каждое животное за 5 мин, 10 мин, 20 мин.

2. 1 сутки = 24 ч, значит, на самолете можно добраться в 24 раза быстрее. *Замечание*: рассуждения можно подтвердить расчетами.

3. Способ 1. 1) 12 · 2 = 24 (ч) — *потребуется туристу для прохождения расстояния, в 2 раза большего, чем расстояние от базы до поселка*; 2) 24 : 3 = 8 (ч) — *потребуется велосипедисту*. Способ 2. 1) 12 : 3 = 4 (ч) — *время движения велосипедиста от базы до поселка*; 2) 4 · 2 = 8 (ч).

4*. 1) 12 – 5 = 7 (ч) — *Незнайка был в пути до того, как выехали Винтик и Шпунтик*; 2) 5 · 7 = 35 (км) — *прошел Незнайка*; 3) 12 – 5 = 7 (км/ч) — *скорость сближения*; 4) 35 : 7 = 5 (ч) — *догонят*; 5) 12 · 5 = 60 (км) — *проедут автомобилисты до места встречи с Незнайкой*. Проверка: 35 + 5 · 5 = 60 (км) — *пройдет Незнайка*.

5*. $\frac{1}{5}$ ч = 12 мин; 2 км 500 м = 1 км (12 мин) + 1 км (12 мин) + 500 м (6 мин); 12 + 6 = 18 мин < 20 мин. Ответ: успеет.

6. 1) 13 – 5 = 8 (км); 2) 8 – 5 = 3 (км). Проверка: 13 + 3 = = 16 (км); 5 + 3 = 8 (км); 16 : 8 = 2 раза.

7. Решение подбором. Вариант 1: через 10 дней. Тогда: 1) 7 · 10 = 70 (миль) — *пройдет первый путник*; 2) 1 + 2 + + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 (миль) — *пройдет второй* *путник*, 70 > 55. Вариант 1 не подходит. Вариант 2: через 12 дней. Тогда: 1) 70 + 7 · 2 = 84 (мили) — *пройдет первый путник*; 2) 55 + 11 + 12 = 78 (миль) — *пройдет второй путник*, 84 > 78. Вариант 2 не подходит. Вариант 3: через 13 дней. Тогда: 1) 84 + 7 = 91 (милю) — *пройдет первый путник*; 2) 78 + 13 = 91 (милю) — *пройдет второй путник*, 91 = 91, т. е. вариант 3 подходит. Решение рассуждением: на 7-й день пути оба подмастерья пройдут по 7 миль, значит, расстояние, на которое второй подмастерье отстал за 6 дней, он должен нагнать за следующие 6 дней, т. е. 6 + 1 + 6 = = 13 дней. *Замечание*: подобные рассуждения можно фиксировать в таблице.

8. Решения нет, так как если автомобиль увеличит скорость в 2 раза, или на 60 км (до 120 км/ч), то он будет проезжать 2 км/мин или 1 км за 30 с, т. е. 1 км автомобиль будет проезжать на полминуты быстрее, а не на минуту. Заметим, что даже увеличение скорости до нереальных значений — 240 км/ч или 4 км/мин, когда автомобиль проезжает 1 км за 15 с, не удовлетворяет условию, поскольку 1 км автомобиль будет проезжать только на 45 с быстрее.

9. 1) 18 : 9 = 2 (м/с) — *скорость поезда*; 2) 36 + 18 = = 54 (м) — *общее расстояние*; 3) 54 : 2 = 27 (с).

10. Ответ зависит от направления движения машин: 200 + (60 + 80) = 340 (км) — *если машины едут в разные стороны, удаляясь*; 200 – (60 + 80) = 60 (км) — *если машины едут навстречу друг другу*; 200 + (80 – 60) = 220 (км) — *если машины движутся в одном направлении с отставанием*; 200 – (80 – 60) = 180 (км) — *если машины движутся в одном направлении вдогонку*.

11. На 60 км/ч. Известно, что 60 км/ч = 1 км/мин. Согласно условию задачи автомобиль должен проезжать 1 км не за минуту, а за полминуты. Следовательно, его скорость надо увеличить в 2 раза, или на 60 км/ч. Проверка: 120 км/ч = 2 км/мин или 1 км за полминуты.

12*. (30 + 70) · 20 – 500 = 1500 (м) — *если двигаются навстречу друг другу*; 500 + (70 – 30) · 20 = 1300 (км) — *если двигаются с отставанием*; 500 + (30 + 70) · 20 = 2500 (м) — *если двигаются в противоположных направлениях*; (70 – 30) · 20 – 500 = 300 (м) — *если двигаются вдогонку*.

13*. 1) 5 – 4 = 1 (км/ч) — *скорость сближения*; 2) 2 : 1 = = 2 (ч) — *время в пути до встречи*; 3) 8 · 2 = 16 (км) — *пролетит галчонок*.

Не для печати

14. 1) 45 – 15 = 30 (с) — *время на проезд 450 м*; 2) 450 : 30 = = 15 (м/с) — *скорость поезда* (*15 м/с = 54 км/ч*); 3) 15 · 15 = = 225 (м) — *длина поезда*.

15*. 1) 10 – 8 = 2 (мин) — *быстрее*; 2) 10 · 8 = 80 (м) — *проплывет за 2 мин с первоначальной скоростью*; 3) 80 : 2 = = 40 (м/мин) — *первоначальная скорость*; 4) 40 · 10 = = 400 (м) — *расстояние от подводного царства до берега*. Проверка: 40 + 10 = 50 м/мин, 50 · 8 = 400 м.

16. 1) 1 ч = 60 мин, 60 : 2 = 30 (мин) — *время на автобусе, которое потратили на половину пути*; 2) 5 ч 30 мин – – 30 мин = 5 (ч) — *время пути пешком, которое потратили на половину пути*; 3) 5 · 2 = 10 (ч) — *время на весь путь пешком*; 4) 10 : 1 = 10 (раз) — *быстрее на автобусе, чем пешком*.

17. 1) 50 + 40 = 90 (км/ч) — *общая скорость*; 2) 90 км/ч = = 25 м/с, 25 · 10 = 250 (м) — *длина товарного поезда*.

18. 1) 50 · 15 = 750 (км/ч) — *скорость самолета*; 2) 50 · 14 = 700 (км) — *проехал поезд до того, как вылетел самолет*; 3) 700 + 50 = 750 (км) — *половина пути, так как здесь самолет догнал поезд*; 4) 750 · 2 = 1500 (км) — *искомое расстояние*.

19. 2 ч 30 мин.

20. 20 км. Задача решается методом подбора. Проверяются числа, кратные и 4, и 5 (20, 40, 60...). Устанавливается соответствие между искомыми и данными и находится число, удовлетворяющее всем условиям: 20 : 4 = 5 ч, 20 : 5 = = 4 ч, 5 – 4 = 1 ч, 1 ч = 1 ч.

21. В момент встречи движущиеся объекты будут находиться в одном месте, значит, расстояние до данного пункта будет одинаковым.

22. 30 мин.

23*. (3 + 3) · 210 = 1260 км.

24. 1) 75 : 3 = 25 (м/с) — *общая скорость*; 2) 25 м/с = = 90 км/ч, 90 – 40 = 50 (км/ч) — *скорость встречного поезда*.

25*. За 8 мин.

26. $\frac{1}{3}$ часть пути, так как в половине пути 3 равные части, 2 из которых пассажир спал.

27*. 10 м; 2 м/мин.

28*. 2 м/мин; 18 мин.

29*. 1) 40 : 10 = 4 (пр.) — *лисе от зайца до норки*; 2) 10 + 4 = 14 (пр.) — *лисе до норки*; 3) 3 · 14 = 42 (ск.) — *сделает за это время заяц*. $40 < 42$. Ответ: не догонит.

30*. В 14 ч 30 мин.

Список литературы

1. *Аменицкий Н. Н., Сахаров И. П.* Забавная арифметика. — М.: Наука, 1991.

2. *Арнольд И. В.* О задачах по арифметике // Математика в школе. — 1995. — № 5.

3. *Артемов А. К.* Учебные задачи в обучении математике // Начальная школа. — 1992. — № 1.

4. *Баврин И. И., Фрибус Е. А.* Занимательные задачи по математике. — М.: ВЛАДОС, 1999.

5. *Байрамукова П. У.* Через сказку в мир математики. Сборник задач. — М.: РАЙЛ, 1997.

6. *Баринова О. В.* Обучение решению задач // Начальная школа. — 1999. — № 2.

7. *Богомолова Л. Г.* Не забывать о способных // Начальная школа. — 1991. — № 5.

8. *Болховитинов В. Н. и др.* Твое свободное время: Занимательные задачи, опыты, игры. — М.: Детская литература, 1970.

9. *Валеева И. А.* Особенности умственных действий младших школьников при решении эвристических задач // Начальная школа. — 1996. — № 3.

10. *Герасимова Н. А., Новгородова Е. С.* Занимательная математика. — М.: Высшая школа, 1973.

11. *Германович П. Ю.* Сборник задач по математике на сообразительность: пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1960.

12. *Гершензон М. А.* Головоломки профессора Головоломки. Сборник затей, фокусов, самоделок, занимательных задач. — М.: Детская литература, 1982.

13. *Игнатьев В. А.* Внеклассная работа по арифметике в начальной школе. — М.: Просвещение, 1965.

Не для сети

14. *Игнатьев В. А., Шор Я. А.* Сборник арифметических задач повышенной трудности. — М.: Просвещение, 1968.

15. *Игнатьев Е. И.* В царстве смекалки / под ред. М. К. Потапова. — М.: Наука, 1978.

16. *Клименченко Д. В.* Задачи по математике для любознательных: кн. для учащихся 5—6 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1992.

17. *Колягин Ю. М.* Задачи в обучении математике. Ч. I / под ред. Ю. М. Колягина. — М.: Просвещение, 1977.

18. *Колягин Ю. М.* Задачи в обучении математике. Ч. II / под ред. Ю. М. Колягина. — М.: Просвещение, 1977.

19. *Колягин Ю. М.* Учебные математические задания творческого характера // Роль и место задач в обучении математике / под ред. Ю. М. Колягина. — М., 1973. — Вып. II.

20. *Кордемский Б. А.* Очерки о математических задачах на смекалку. — М.: Учпедгиз, 1958.

21. *Кордемский Б. А.* Увлечь школьников математикой. — М.: Просвещение, 1981.

22. *Кордемский Б. А., Адахов А. А.* Удивительный мир чисел. — М.: Просвещение, 1986.

23. *Кострикина Н. П.* Задачи повышенной трудности в курсе математики 4—5 классов: кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1986.

24. *Леман И.* Увлекательная математика: пер. с нем. — М.: Знание, 1985.

25. *Лихтарников Л. Н.* Занимательные логические задачи. — СПб.: Лань, 1997.

26. *Мунчинова Л. Д., Борлыкова Б. Н.* Математическая олимпиада // Начальная школа. — 1997. — № 6.

27. *Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С.* Математическая шкатулка: пособие для учащихся 4—8 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1988.

28. *Николау Л. Л.* Задачи повышенной трудности // Начальная школа. — 1998. — № 7.

29. *Перельман Я. И.* Живая математика / под ред. В. Г. Болтянского. — М.: МГИК, 1993.

30. *Перельман Я. И.* Занимательная арифметика. Загадки и диковинки в мире чисел. — 9-е изд. с доп. А. В. Рывкина. — М.: Физматгиз, 1959.

31. *Перельман Я. И.* Занимательная геометрия. — М.: Физматгиз, 1958.

32. *Перельман Я. И.* Занимательная математика: математические рассказы и очерки. — М.: МГИК, 1993.

33. *Перельман Я. И.* Занимательные задачи и опыты. — М.: Детская литература, 1972.

34. *Петрова В. И.* Развитие мышления при решении задач // Начальная школа. — 1992. — № 1.

35. Поисковые задачи по математике (4—5 классы): пособие для учителей / А. Я. Крысин, В. Н. Руденко, В. И. Садкова и др. — М.: Просвещение, 1975.

36. *Пойа Д.* Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание: пер. с англ. / под ред. С. А. Яновской. — М.: Наука, 1976.

37. *Поляк Г. Б. и др.* Занимательные задачи. — М.: Наука, 1953.

38. *Пономарев С. А.* Задачник-практикум по арифметике. — М.: Просвещение, 1966.

39. *Попова Н. С., Циммерман М. М.* Решение арифметических задач в начальной школе. — М.: Просвещение, 1967.

40. *Радченко В. П.* Способ подбора при решении задач // Начальная школа. — 1998. — № 11—12.

41. Развивающие задачи для математического досуга / сост. Э. А. Кремнев, З. С. Сухотина. — М.: Школа-пресс, 1993.

42. *Свечников А. А.* Решение математических задач в 1—3 классах: пособие для учителя. — М.: Просвещение, 1976.

43. Смекалка для малышей. Занимательные загадки, ребусы, головоломки / сост. С. Асанин. — М.: Омега, 1994.

44. *Сорокин П. И.* Занимательные задачи по математике с решениями и методическими указаниями. — М.: Просвещение, 1967.

45. *Степанова С. Ю.* Сборник задач по математике для учащихся 1—3 кл. — Ижевск: Свиток, 1998.

46. *Стойлова Л. П., Пышкало А. М.* Основы начального курса математики: учеб. пособие для учащихся пед. уч-щ по спец. № 2001 «Преподавание в нач. классах общеобразоват. шк.». — М.: Просвещение, 1988.

47. *Столяр А. А.* Педагогика математики. — 3-е изд., перераб. и доп. — Минск: Вышэйшая школа, 1986.

48. Счетная мудрость. Трактат по практической арифметике и землемерному делу. — СПб., 1789.

49. *Тихонова Н. В.* Задачи в развивающем обучении математике // Начальная школа. — 1998. — № 7.

50. *Труднев В. П.* Внеклассная работа по математике в начальной школе. — М.: Просвещение, 1975.

51. *Труднев В. П.* Считай, смекай, отгадывай! — М.: Просвещение, 1964.

52. *Фридман Л. М.* Изучаем математику: кн. для учащихся 5—6 кл. общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 1995.

53. *Фридман Л. М.* Логико-психологический анализ школьных учебных задач. — М.: Педагогика, 1977.

54. *Фридман Л. М.* Учитесь учиться математике. — М.: Просвещение, 1985.

55. *Фридман Л. М., Турецкий Е. Н.* Как научиться решать задачи. — М.: Просвещение, 1984.

56. *Царева С. Е.* Приемы первичного анализа задачи // Начальная школа. — 1985. — № 9.

57. *Царева С. Е.* Обучение решению задач // Начальная школа. — 1998. — № 1.

58. *Цукарь А. Я.* Задачи повышенной трудности // Начальная школа. — 1983. — № 6.

59. *Чутчева Е. Б.* Занимательные задачи по математике для младших школьников. — М.: Владос, 1996.

60. *Шарыгин И. Ф., Шевкин А. В.* Математика: задачи на смекалку: учеб. пособие для 5—6 кл. — М.: Просвещение, 1995.

61. *Фоминых Ю. Ф., Плотникова Е. Г.* Педагогика математики. — Пермь: Изд-во Пермского университета, 2000.

Не для печати

Оглавление

Не для печати